# TD Lambda calcul
—
# Confluence, alpha-conversion

E. Lozes

10 février 2009

**Exercice 1 – $\alpha$-équivalence et substitutions**
On rappelle que l'$\alpha$-équivalence, notée $=_\alpha$, est la (plus petite) congruence telle que $\lambda x.u \ =_\alpha \ \lambda y.(u[x := y])$ avec la condition $x \notin bv(u)$ et $y \notin v(u)$. On dit qu'un terme $u$ vérifie la convention de Barendregt si $fv(v) \cap bv(v) = \emptyset$ pour tout sous-terme $v$ de $u$.

1. parmi les termes suivants, quels sont ceux qui sont $\alpha$-équivalents : $u_1 = \lambda x.\lambda y.x$, $u_2 = \lambda x.\lambda x.x$, $u_3 = \lambda x.\lambda y.y$ ? Donner un exemple de terme qui ne vérifie pas la convention de Barendregt
2. Soient $u, u', v, v'$ tels que $u =_\alpha u'$ et $v =_\alpha v'$. Montrer que $u[x := v] =_\alpha u'[x := v']$.
3. Soient $x, y$, et $u, v, w$ tels que $x \neq y$ et $x \notin fv(w)$. Montrer que
$$u[x := v][y := w] \ = \ u[y := w][x := v[y := w]]$$

**Exercice 2 – Graphes de réduction**

1. Calculer les graphes de réduction des termes suivants, en faisant apparaître les redex : 1) $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z$. 2)$(\lambda x.\lambda y.x)\ \big((\lambda x.xx)\ (\lambda x.\lambda y.xy)\big)$
2. En quel sens, et sous quelles conditions, les termes $(\lambda y.((\lambda x.M)N))\ P$ et $(\lambda x.((\lambda y.M)P))\ N$ sont-ils équivalents ? Quel autre terme "équivalent" peut-on aussi former ?

**Exercice 3 – Formes normales**

1. Un terme $u$ est dit minimal par rapport à la $\beta$-réduction si
$$\forall v, u \to_\beta^* v \quad \Rightarrow \quad u =_\alpha v.$$
Montrer qu'un terme en forme normale est minimal, mais que la réciproque est fausse.

2. Donnez des exemples de termes fortement normalisants, faiblement normalisant, et divergents.

**Exercice 4 – Autour de la confluence**
On rappelle qu'un système de réécriture est

- localement confluent si $u \leftarrow v \rightarrow w$ implique qu'il existe $t$ tel que $u \rightarrow^* t\ {}^* \leftarrow w$.
- confluent si $u\ {}^* \leftarrow v \rightarrow^* w$ implique qu'il existe $t$ tel que $u \rightarrow^* t\ {}^* \leftarrow w$.
- Church-Rosser si $u \leftrightarrow^* v$ implique qu'il existe $t$ tel que $u \rightarrow^* t\ {}^* \leftarrow v$.
- fortemement confluent si $u \leftarrow v \rightarrow w$ implique qu'il existe $t$ tel que $u \rightarrow t \leftarrow w$.

1. Quelles propriétés (de $\rightarrow$ ou $\rightarrow^*$) induisent quelles autres ? Faire un schéma.
2. Quel est l'intérêt de la normalisation dans un système de réécriture confluent ?
3. Montrez le lemme de Newman : si $\rightarrow$ est localement confluent et fortement normalisant, alors $\rightarrow$ est confluent. Donnez un contre-exemple si on retire l'hypothèse de forte normalisation.
4. Montrez le lemme de Hindley-Rosen : si $\rightarrow_1$ et $\rightarrow_2$ sont deux systèmes de réécriture confluents qui commutent (ie. $u_1 \leftarrow v \rightarrow_2 w$ implique $u \rightarrow_2 t_1 \leftarrow w$), alors $(\rightarrow_1 \cup \rightarrow_2)^*$ est confluent.
5. Montrez la variante suivante : si $\rightarrow_1$ et $\rightarrow_2$ sont deux systèmes de réécriture confluents qui commutent faiblement (ie. $u_1 \leftarrow v \rightarrow_2 w$ implique $u \overset{=}{\rightarrow}_2 t_1\ {}^* \leftarrow w$), alors $(\rightarrow_1 \cup \rightarrow_2)^*$ est confluent.

**Exercice 5 – Réduction parallèle**
On définit une nouvelle règle de réduction $\Rightarrow$, appellée *réduction parallèle*, par :

- $u \Rightarrow u$ pour tout terme $u$ ;
- si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$, alors $uv \Rightarrow u'v'$ ;
- si $u \Rightarrow u'$, alors $\lambda x.u \Rightarrow \lambda x.u'$ ;
- si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$, alors $(\lambda x.u)v \Rightarrow u'[x := v']$.

1. Montrez que $\Rightarrow$ est fortement confluent.
2. Montrez que $\rightarrow_\beta \subsetneq \Rightarrow \subsetneq \rightarrow_\beta^*$ (exhiber des contre-exemples pour les implications strictes).
3. En déduire que $\rightarrow_\beta$ est confluent.
4. Montrer que $\rightarrow_\eta$ est fortement confluent.
5. Montrer que $\rightarrow_\eta$ et $\rightarrow_\beta$ commuttent faiblement, au sens du lemme de Hindley-Rosen. En déduire que $\rightarrow_{\beta\eta}$ est confluent.