Programmation 1

TD n°8

Aliaume Lopez

14 novembre 2019

♻ : reprise d'un exercice ❗ : exercice de compréhension
👍 : exercice fondamental de cours 🏆 : une solution complète par mail = un gâteau

Exercise 1 : Quelques aides

1. Sortir une feuille pour noter la correction.
2. Ne pas attendre la correction pour réfléchir sur une feuille.
3. Ne pas hésiter à demander à son voisin, ou mieux, au chargé de TD.
4. Rédiger et ne pas se contenter d'avoir une idée.

1 Back to basics

Graphes

Un graphe est une paire $\langle V, E\rangle$ où V est un ensemble *fini* et $E \subseteq V \times V$.
On dit que G est un graphe sur X si $V \subseteq X$.

Expressions de graphes

On donne la grammaire abstraite suivante dont les expressions sont notées Expr_X

$$\begin{aligned} e := {} & \mathsf{Empty} \\ \mid {} & \mathsf{V}x \qquad x \in X \\ \mid {} & e \oplus e \\ \mid {} & e \otimes e \end{aligned}$$

On autorisera dans des calculs intermédiaires de la sémantique à petit pas des expressions $\bar{g}$ où g est un graphe. On notera l'ensemble des expressions intermédiaires Expr_X^+.

Frames d'expressions

On donne la syntaxe suivante pour les frames d'expression

$$\begin{aligned} F := {} & \square \oplus e \\ \mid {} & g \oplus \square \\ \mid {} & \square \oplus e \\ \mid {} & g \oplus \square \end{aligned}$$

Où g est un graphe.

$$\frac{}{\mathsf{Empty} \to \langle \emptyset, \emptyset \rangle}$$

$$\frac{}{\mathsf{V}x \to \langle \{x\}, \emptyset \rangle}$$

$$\frac{e \to e'}{F[e] \to F[e']}$$

$$\frac{g_1 = \langle V_1, E_1 \rangle \quad g_2 \ = \langle V_2, E_2 \rangle \quad g_3 \ = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle}{\bar{g_1} \oplus \bar{g_2} \to \bar{g_3}}$$

$$\frac{g_1 = \langle V_1, E_1 \rangle \quad g_2 \ = \langle V_2, E_2 \rangle \quad g_3 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2 \rangle}{\bar{g_1} \otimes \bar{g_2} \to \bar{g_3}}$$

Figure 1 – Sémantique à petits pas

$$[\![\mathsf{V}x]\!] \triangleq \langle \{x\}, \emptyset \rangle \tag{1}$$

$$[\![\mathsf{Empty}]\!] \triangleq \langle \emptyset, \emptyset \rangle \tag{2}$$

$$[\![e_1 \oplus e_2]\!] \triangleq \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle \qquad \text{si } [\![e_1]\!] = \langle V_1, E_1 \rangle \wedge [\![e_2]\!] = \langle V_2, E_2 \rangle \tag{3}$$

$$[\![e_1 \otimes e_2]\!] \triangleq \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2 \rangle \qquad \text{si } [\![e_1]\!] = \langle V_1, E_1 \rangle \wedge [\![e_2]\!] = \langle V_2, E_2 \rangle \tag{4}$$

Pour les expressions étendues, on ajoute la règle suivante

$$[\![\bar{g}]\!] \triangleq g \tag{5}$$

Figure 2 – Sémantique dénotationnelle

Exercise 2 : Cool semantics of graphs

1. Énoncer puis prouver un théorème de progrès sur la sémantique à petit pas.
2. Énoncer puis prouver un théorème de déterminisme sur la sémantique à petit pas.
3. Énoncer un théorème de terminaison, le démontrer.
4. **TOSKIPUNLESSYOUARESTRONG** On transforme les frames pour être de la forme $F := \square \oplus e \mid e \oplus \square \mid \square \otimes e \mid e \otimes \square$.
   (a) Montrer que la sémantique n'est plus déterministe.
   (b) Énoncer un théorème de confluence.
   (c) Le démontrer.
   (d) En admettant la terminaison du nouveau système, en déduire l'existence d'une *unique* forme normale pour les expressions.

   On étudie après cette question uniquement la sémantique déterministe définie au départ.
5. Énoncer un résultat de correction et d'adéquation des deux sémantiques sur les graphes.
6. Démontrer la correction.
7. Démontrer l'adéquation.
8. Démontrer en sémantique opérationnelle l'équivalence suivante. On pourra admettre que la sémantique opérationnelle possède les mêmes formes normales quand elle est non déterministe.

$$\forall g, x \otimes (y \oplus z) \to^* \bar{g} \iff (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \to^* \bar{g} \tag{6}$$

9. Définir une fonction $\mathsf{map} : (X \to Y) \times \mathsf{Expr}_X \to \mathsf{Expr}_Y$.
10. Calculer la sémantique dénotationnelle de map sur les graphes.
11. Quel est l'ensemble des graphes construits à partir des expressions Expr_X ?
12. En admettant l'existence d'une fonction $V : \mathsf{Expr}_X \to \mathcal{P}_f(X)$ qui à une expression de graphe associe l'ensemble de ses sommets, décrire une fonction $N_x : \mathsf{Expr}_X \to \mathcal{P}_f(X)$ qui à une expression de graphe e représentant un graphe $\langle V, E\rangle$ associe l'ensemble $\{y \in X \mid (x, y) \in E\}$.
    Justifier que pour toute expression $e \in \mathsf{Expr}_X$ telle que $[\![e]\!] = \langle V, E\rangle$ on a l'égalité $N_x(e) = \{y \mid (x, y) \in E\}$.

2 Treillis et ordres

Knaster-Tarski

Soit $(X, \leq)$ un treillis complet et $f : X \to X$ une fonction monotone. Alors l'ensemble des points fixes de f est un treillis complet non vide.

Exercise 3 : Une preuve de Knaster-Tarski

Soit f une fonction monotone de X dans X où X est un treillis complet.

1. Montrez que f possède un plus grand et un plus petit point fixe.
2. En déduire que l'ensemble des points fixes est un treillis complet.

Exercise 4 : Utilisation de Knaster-Tarski

Démontrez le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein : si A et B sont deux ensembles tels qu'il existe deux injections f et g respectivement de A dans B et de B dans A, alors A est en bijection avec B. *Indication : faire un dessin avec deux patates, tout serait si beau si on pouvait trouver X tel que $f(X)^c$....*

3 DCPOs

Rappel sur les familles dirigées

Une famille D non vide d'un ensemble $(X, \leq)$ est dirigée si et seulement si

$$\forall (x, y) \in D, \exists z \in D, z \geq x \wedge z \geq y$$

Rappels sur les DCPOs

Un DCPO est un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$ tel que toute famille dirigée possède un sup. Un DCPO est *pointé* s'il existe un élément minimal.

Exercise 5 : Qui est quoi ?

Dessinez les ensembles suivants et indiquez lesquels sont des DCPOs, lesquels sont des treillis complets, lesquels sont pointés, le tout *en justifiant*.

1. $\mathbf{1} = \{\perp\}$.
2. $\mathbf{Bool}_\perp = \{0, 1, \perp\}$ avec $x < y$ si et seulement si $x = \perp$ et $y \neq \perp$.
3. $\mathbb{N}$ avec l'ordre usuel.
4. $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec l'ordre usuel.
5. $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre produit.
6. $\{[x, y] \mid x, y \in I, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$ où $I = [0, 1]$.
7. $\{[x, y] \mid x, y \in I \cap \mathbb{Q}, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$ où $I = [0, 1]$.

Exercise 6 : Knaster-Tarski VS Scott

On munit $[0, 1]$ de l'ordre usuel qui le rend DCPO et complet en tant que treillis.

1. Montrez qu'une fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ monotone admet un point fixe
2. Montrez que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est une fonction Scott-continue alors elle possède un point fixe. De plus, ce point fixe est limite de la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où $\forall i \in \mathbb{N}, x_i \triangleq f^i(0)$.
3. Montrez l'équivalence entre les deux propositions suivantes pour une fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ monotone.
   - f préserve les sup
   - f est continue à gauche sur $[0, 1]$
4. En déduire que $\sup f^i(0)$ n'est pas toujours un point fixe de f en exhibant un contre-exemple.

4 Théorie des DCPOs

Exercise 7 : Catégorie Cartésienne Close

Montrez que la catégorie des DCPOs est cartésienne close, c'est-à-dire passez par les étapes suivantes :

1. Montrer qu'il existe un DCPO $\mathbf{1}$ tel que pour tout DCPO D il existe une unique fonction continue de $\mathbf{1}$ vers D.
2. Montrer que si D_1 et D_2 sont deux DCPOs alors $D_1 \times D_2$ avec l'ordre produit est un DCPO.

3. Montrer que $D_1 \times D_2$ vérifie une propriété universelle du produit (où toutes les quantifications sont sur des fonctions continues).

$$\forall f : A \to D_1, g : A \to D_2, \exists! h : A \to D_1 \times D_2, \pi_1 \circ h = f \wedge \pi_1 \circ h = g \tag{17}$$

4. Montrer que $A \implies B$ l'ensemble des fonctions continues de A vers B ordonnées point à point est un DCPO.
5. Montrer que si A, B, C sont des DCPOs, alors toute fonction continue $f : A \times B \to C$ se transforme en une fonction $\Gamma f : A \to (B \implies C)$ qui est aussi continue !
6. Montrer qu'une fonction $f : A \times B \to C$ est continue si et seulement si elle est continue en ses deux arguments.
7. Montrer que l'application d'évaluation $\Delta : A \times (A \implies B) \to B$ est continue.

5 Topologie

Topologie

Une topologie τ sur un ensemble X est un ensemble de parties de X qui vérifie

1. τ est stable par intersection finie.
2. τ est stable par union quelconque.
3. τ contient l'ensemble X.
4. τ contient l'ensemble $\emptyset$.

On dira alors d'un élément de τ qu'il est *ouvert*. Le complémentaire d'un ouvert est par définition un ensemble *fermé*.

Fonction continue

Une fonction $f : X \to Y$ est *continue* de (X, τ) vers (Y, θ) si et seulement si

$$\forall U \in \theta, f^{-1}(U) \in \tau \tag{22}$$

Topologie de Scott

Soit $(D, \leq)$ un DCPO. Une partie $U \subseteq D$ est appellée un *ouvert de Scott* si et seulement si elle vérifie

1. U est clos vers le haut :

$$\forall x, \forall y. \quad x \in U \wedge x \leq y \implies y \in U \tag{23}$$

2. U est inaccessible par le bas :

$$\forall E \text{ dirigée} \qquad \sup E \in U \implies E \cap U \neq \emptyset \tag{24}$$

Exercise 8 : Topologie de Scott

1. Montrer que la topologie de Scott est une topologie.
2. Montrer qu'un fermé de D est clos par le bas et par supremum de famille dirigée.
3. Montrer que $\downarrow x \triangleq \{y \in D \mid y \leq x\}$ est un fermé de D pour la topologie de Scott.
4. Montrer que les fonctions continues pour la topologie de Scott sont les fonctions Scott-continues.

! **Exercise 9 : Booléens**

On considère $\mathbf{Bool}_\perp = \{0, 1, \perp\}$ ordonné comme précédement.

1. Quels sont les ouverts de Scott de $\mathbf{Bool}_\perp$? Les fermés ?
2. Exhibez toutes les fonctions monotones de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans $\mathbf{Bool}_\perp$.
3. Soit D un DCPO, et f une fonction monotone de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans D. Montrez que f est Scott-continue.
4. Dessinez $\mathbf{Bool}_\perp \times \mathbf{Bool}_\perp$ (ordre produit).
5. Énumérez les fonctions Scott continues f telle que f restreinte à $\{0, 1\}$ définit la fonction booléenne « ou ».
6. En voyant $\perp$ comme « un calcul divergent », donnez une interprétation calculatoire de chacun des prolongements à $\mathbf{Bool}_\perp$ de la fonction booléenne « ou ».

Exercise 10 : Réels à précision arbitraire

Soit $I = \mathbb{R}$ et $J = \{[x, y] \mid x, y \in I, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$.

1. Montrez que J est un DCPO. Est-ce un treillis ? Complet ?
2. Donnez une fonction monotone de J dans $\mathbf{Bool}_\perp$ qui n'est pas Scott-continue.
3. Quels sont les éléments maximaux de J ? Notons M l'ensemble des éléments maximaux.
4. Soit f une fonction continue de J dans $\mathbf{Bool}_\perp$. Montrez que $f^{-1}(\{1\})$ est ouvert.
5. Considérons l'application $I : x \mapsto \{x\}$ qui va de $[0, 1]$ dans J. Montrer que I est continue.

Bonus Qu'est-ce que la topologie de Scott restreinte à l'ensemble des éléments maximaux ?

6. Montrer que M est connexe. C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ouverts U, V disjoints tous deux non vides tels que
$$U \cap M \uplus V \cap M = M \tag{27}$$
7. Soit g une fonction continue de J dans $\mathbf{Bool}_\perp$ telle que pour tout $x \in I$, $g(\{x\}) \neq \perp$. Montrez que g est constante sur I.
8. Imaginons un langage de programmation qui implémente l'arithmétique réelle de précision arbitraire en utilisant des intervalles. Comment se compotera la fonction d'égalité de ce langage ?

Exercise 11 : Mots finis . . . ou infinis

Soit $S = \{0, 1\}^\infty = \{0, 1\}^* \cup \{0, 1\}^\omega$, avec l'ordre préfixe.

1. Montrez que S est un DCPO. Est-ce un treillis ?
2. Quels sont les éléments maximaux de S ?
3. Soit f une fonction de S dans $\mathbf{Bool}_\perp$ telle que :
$$\forall s \in \{0,1\}^\omega \begin{cases} f(s) = 1 & \text{si } s \text{ contient le facteur } 0 \cdot 1 \\ f(s) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrez que f n'est pas Scott-continue. Intuition ?
4. On considère la fonction $v : S \to J$ définie par :
$$v(b_1 \cdot b_2 \cdots b_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} b_i, \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} b_i + 2^{-n}\right]$$
$$v(b_1 \cdot b_2 \cdots) = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} b_i\right\}$$
A quoi sert v ? Montrez que v est Scott-continue. Est-elle injective ?
5. Soit g une fonction Scott-continue de S dans $\mathbf{Bool}_\perp$ qui est compatible avec v :
$$\forall x, y \in S, v(x) = v(y) \to g(x) = g(y)$$
Montrez que si $\forall x \in \{0, 1\}^\omega$, $g(x) \neq \perp$, alors g est constante sur $\{0, 1\}^\infty$. Quel espoir pour l'arithmétique de précision arbitraire ?

Exercise 12 : Topologie et séparation

1. Montrer que si la topologie de Scott sur $(X, \leq)$ est séparée (i.e. pour tout $x \neq x'$ il existe deux voisinages ouverts U et U' respectivement de x et de x' dont l'intersection est vide) alors $\leq$ est en réalité l'égalité sur X.
2. Montrer que la topologie de Scott est T_0, c'est-à-dire si pour tout $x \neq x'$ il existe un voisinage ouvert de x qui en contient pas x' *ou l'inverse !*.