

# Stage de Recherche

Théorèmes de préservation

M2 MPRI, 2018 – 2019

ALIAUME LOPEZ

`aliaume.lopez@ens-paris-saclay.fr`

École Normale Supérieure Paris-Saclay

Université Paris-Saclay

Encadré par

SYLVAIN SCHMITZ

JEAN GOUBAULT-LARRECQ

`sylvain.schmitz@lsv.fr`

`goubault@lsv.fr`

LSV, ENS Paris-Saclay, CNRS

LSV, ENS Paris-Saclay, CNRS

Université Paris-Saclay

Université Paris-Saclay

Version du

19 Août 2019

Keywords:

preservation theorems, finite model theory, well quasi orderings

# 1 | Fiche de synthèse

## Contexte Général

La logique du premier ordre sur une signature fixée  $FO[\sigma]$  est particulièrement intéressante sous plusieurs aspects. D'un côté, elle s'avère expressive pour un certain nombre de problèmes [Chang and Keisler, 1990], de l'autre, elle bénéficie d'une structure riche, possédant par exemple des théorèmes de localité [Gaifman, 1982], de complétude, de compacité, des caractérisations en terme de jeux et des méta-théorèmes algorithmiques pour la vérification [Kreutzer, 2008].

L'étude des structures finies est particulièrement liée aux bases de données [Codd, 1970] et la théorie des modèles finis s'est avérée particulièrement efficace dans la compréhension de celles-ci [Abiteboul et al., 1995]. Toutefois, elle ne peut pas reposer sur les mêmes outils théoriques que la théorie des modèles *classique* et nécessite de nouvelles approches [Grädel et al., 2007]. Le lien fort entre théories et modèles repose en effet sur l'existence de modèles infinis, et les résultats ne *relativisent* pas automatiquement quand on se restreint aux modèles finis. Par exemple, le théorème de compacité n'est plus valide quand on ne considère que des modèles finis.

De nouvelles techniques sont donc développées, utilisant principalement des constructions à base de localité. Afin, d'obtenir des analogues aux théorèmes classiques, il faut très souvent restreindre les classes de structures étudiées.

## Le problème étudié

La question principale de ce stage a été l'existence de théorèmes de préservation pour des classes de structures finies. Une des motivations principales provient du lien étroit entre structures relationnelles finies et bases de données. En effet, de nombreuses questions provenant des bases de données ont été approchées avec succès en utilisant des techniques provenant de la théorie des modèles finis. Dès les années 70 [Codd, 1970] cette approche des bases de données devient populaire, et de nombreux langages de requêtes correspondent à des sous-logiques ou à des extensions de FO.

Un exemple pertinent, d'autant plus qu'il découle d'un résultat récent en théorie des modèles finis [Rossman, 2008] est l'ensemble des requêtes nom-

mées *union of conjunctive queries*, que l'on peut aussi comprendre comme étant les requêtes écrites avec les constructions *select*, *union*, *project* et *join*. Cet ensemble de requêtes, qui semble être le plus utilisé en pratique [Abiteboul et al., 1995], est caractérisé par les formules existentielles-positives de FO. Ainsi, l'existence d'un théorème de préservation se réinterprète comme une question sur les langages de bases de données [Atserias et al., 2006]. Ces propriétés de préservation peuvent être pensées comme des formes de modèles *monde ouvert* pour les formules lorsqu'on les pense du point de vue des bases de données [Gheerbrant et al., 2014].

En effet, si ces théorèmes sont connus pour être valides dans le cas infini, leur validité dans le cadre fini n'est pas garantie [Tait, 1959].

De nombreux résultats affirment ou infirment l'existence de tels théorèmes pour certaines classes de structures. Un résultat fondamental récent concerne le théorème de préservation par homomorphisme (HPT) qui a été montré valide sur la classe des structures finies [Rossman, 2008]. En revanche, le théorème correspondant pour l'ordre *sous-structure induite* a été invalidé [Tait, 1959]. Parallèlement, des classes de structures plus restreintes sont étudiées pour l'ordre *homomorphisme* [Atserias et al., 2008] mais aussi pour l'ordre de *sous-structure induite* [Atserias et al., 2006].

## Contribution personnelle

Dans un premier temps, utiliser les techniques issues des *beaux préordres* (wqo) pour détecter une condition suffisante d'existence d'un théorème de préservation. L'étude des structures possédant une propriété de beau préordre étant un sujet de recherche actif [Ganian et al., 2017], lié aux décompositions de graphes [Daligault et al., 2010] et possédant déjà des caractérisations intéressantes [Ding, 1992]. Cela permet de transformer tous ces résultats existants en théorèmes de préservation.

Néanmoins, cette approche ne capture pas tous les exemples de la littérature, et on introduit alors une nouvelle définition avec pour objectif de caractériser les espaces possédant un théorème de préservation, c'est la notion d'espace logiquement pré-spectral. On démontre des propriétés de stabilité par produit, union disjointe, mots finis, arbres et une forme de produit semi-direct pour ces espaces. Ce qui se traduit par des

constructions *inductives* de classes vérifiant des théorèmes de préservation. Les constructeurs étudiés correspondent aux constructions connues sur les  $wqo$  pour lesquels une structure logique apparaît naturelle.

## Validité de la méthode

L'utilisation de beaux préordres s'inscrit dans une démarche plus générale qui a fait ses preuves en vérification [Goubault-Larrecq et al., 2016]. La construction abstraite d'espace logiquement pré-spectral qui peut sembler ad-hoc au premier abord se relie à la notion topologique d'espace spectral [Dickmann et al., 2019]. De plus, les résultats de stabilité utilisent les constructions classiques en logique du premier ordre comme le théorème de décomposition de Feferman-Vaught [Makowsky, 2004] ainsi que des résultats de combinaisons de points fixes [Ward, 1942].

Enfin, les résultats obtenus sont les premiers pas vers une compréhension structurelle des théorèmes de préservation. Ainsi, on explicite des conditions suffisantes pour avoir une *relativisation*, des stabilités par morphisme et par opérations algébriques classiques. Par construction, ceux-ci sont très robustes car ils permettent de mieux comprendre l'existence des théorèmes de préservation et construire des classes complexes à partir d'autres, et non pas en utilisant un argument combinatoire spécifique à cette classe.

## Conclusions et ouvertures

L'objectif principal, caractériser topologiquement des espaces de structures finies possédant un théorème de préservation, est atteint, et les théorèmes de stabilité par certaines opérations algébriques pour ces espaces sont très satisfaisants.

Néanmoins, il existe de nombreuses limitations inhérentes à l'approche utilisée. Tout d'abord, ces théorèmes se limitent à FO, et les résultats reposent explicitement sur des théorèmes de décomposition qui ne s'adaptent pas toujours à des logiques plus puissantes [Makowsky, 2004] et implicitement sur des résultats de localité qui ne sont clairement plus valides pour des logiques comme MSO. À l'inverse, des sous-fragments de FO ne sont pas bien compris. Ainsi, l'existence d'un théorème de préservation pour le fragment  $\exists\forall\exists$  [Rosen, 1995] n'entre pas dans la description via des espaces logiquement pré-spectraux. Par ailleurs,

l'approche par espaces logiquement pré-spectraux ne permet pas de comprendre la validité du HPT dans le cas des structures finies, dont la preuve repose sur des propriétés de saturation, à l'opposé des classes étudiées dans le rapport qui sont au contraire *peu denses*.

Enfin, si l'étude des théorèmes de préservation est intéressante en soi, la définition des espaces logiquement pré-spectraux ne capture que ceux-ci, et ne caractérise pas l'existence d'algorithmes efficaces pour répondre à certaines requêtes lorsqu'on contraint la classe de structure a priori [Kreutzer, 2008] [Kreutzer and Dawar, 2009].

Les travaux de Dietrich Kuske et Nicole Schweikardt [Kuske and Schweikardt, 2018] sur des logiques plus puissantes que FO possédant encore des théorèmes de localité semblent prometteurs pour généraliser la notion d'espace logiquement pré-spectral. Ces logiques sont des variantes de FO dans lesquelles des opérateurs de comptage sont ajoutés. Ces opérations étant particulièrement utiles dans des requêtes de bases de données, c'est une piste de généralisation qui mérite d'être poursuivie.

Jusqu'à présent, la notion même d'espace logiquement pré-spectral est construite pour abstraire les preuves reposant sur la finitude du nombre de modèles minimaux. La preuve du HPT dans le cas fini échappe à cette description [Rossman, 2008] mais peut toutefois être expliquée topologiquement [Nešetřil and de Mendez, 2012, Chapitre 10] à l'aide de la dualité de Stone. Essayer de combler le vide entre les espaces logiquement pré-spectraux topologiques et la preuve de Rossman est une piste intéressante pour mieux comprendre la structure des théorèmes de préservation. En particulier, les espaces que l'on étudie via des espaces logiquement pré-spectraux sont souvent *peu denses* alors que la preuve de Rossman s'applique en utilisant des propriétés de saturation, créant des structures denses.

## 2 | Contexte

### 2.1 Théorie des modèles

La théorie des modèles est une branche des mathématiques qui s'intéresse aux connections entre un langage formel de description et ses interprétations [Chang and Keisler, 1990]. Si de nombreuses logiques existent, et donc de nombreux résultats de théorie des modèles, la logique du premier ordre est souvent considérée comme un prérequis pour l'étude des autres types de théories des modèles.

En effet, la théorie des modèles associée à la logique du premier ordre  $FO[\sigma]$  sur une signature relationnelle  $\sigma$  est particulièrement riche. Un des résultats les plus importants est le théorème de complétude qui, associé au théorème de correction, fait correspondre des propriétés purement syntaxiques à des propriétés purement sémantiques.

Les théorèmes de préservation sont une collection de résultats qui décrivent plus en détail la relation entre des fragments syntaxiques et sémantiques des formules du premier ordre. Le théorème de Łós-Tarski, le théorème de positivité de Tarski-Lyndon et le théorème de préservation par homomorphisme sont des résultats fondamentaux datant des années 1950 qui entrent dans cette catégorie. Par exemple, le théorème de positivité de Tarski-Lyndon affirme qu'une formule est préservée par sur-structure<sup>1</sup> si et seulement si elle est équivalente à une formule positive<sup>2</sup>.

### 2.2 Théorie des modèles finis

La *théorie des modèles finis* est principalement l'étude des formules au premier ordre sur des structures finies [Libkin, 2012]. Au premier abord on peut donc penser que la théorie des modèles finis est simplement une sous-branche de la *théorie des modèles classique*. Néanmoins, une partie des résultats fondamentaux ne persiste pas en théorie des modèles finis : le théorème de complétude devient faux, la compacité n'est plus une méthode utilisable et des théorèmes comme celui de Löwenheim-Skolem n'ont tout simplement plus de sens car ils ne parlent que de structures infinies.

Certains théorèmes de préservation ne sont plus valides sur les structures finies. En effet, la notion de préservation sémantique devient beaucoup plus faible quand on se restreint à des structures finies, et il y a

donc plus de formules « préservées », sans pour autant avoir augmenté le fragment syntaxique. Ainsi, le théorème de Łós-Tarski devient faux sur les structures finies [Tait, 1959], tout comme le théorème de positivité de Tarski-Lyndon [Ajtai and Gurevich, 1994]. Néanmoins, le théorème de préservation par homomorphisme a été démontré pour les structures finies [Rossman, 2008] en utilisant des méthodes particulièrement intéressantes ne reposant pas sur la compacité.

### 2.3 Théorèmes de préservation

En toute généralité, si  $\mathcal{C}$  est une classe de structures, et que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ , avoir un théorème de préservation pour  $\mathcal{C}$  ne permet pas de conclure à un théorème de préservation pour  $\mathcal{D}$  et réciproquement. En gardant l'intuition que l'obstruction à un théorème de préservation provient du manque de finesse de la classe de structures (trop de formules sont préservées), il est naturel de contrebalancer cette propriété en contraignant plus de formules à être équivalentes. Ainsi, quitte à choisir  $\mathcal{C}$  très restreinte, beaucoup de formules seront équivalentes, et dans chaque classe d'équivalence qui préserve la satisfaction il existera une formule dans le fragment syntaxique désiré.

**Exemple.** — *Considérons  $\mathcal{C}$  restreinte à une seule structure finie : toutes les formules sont préservées par sur-structure, et toutes sont équivalentes à une formule positive. En effet, soit la formule est valide dans la structure, et donc elle est équivalente à  $\top$ , soit elle est invalide dans la structure, et elle est équivalente à  $\perp$ .*

Une approche moins naïve que l'exemple extrême ci-dessus permet de relier l'étude des théorèmes de préservation aux graphes et structures *peu denses* [Nešetřil and de Mendez, 2012]. Pour ces structures de nombreux résultats sont en lien avec l'évaluation efficace des formules au premier ordre [Kreutzer and Dawar, 2009, Grohe et al., 2017]. Ce genre d'étude permet de montrer l'existence de théorème de préservations pour des classes de structures possédant certaines propriétés de densité comme être de degré borné [Harwath et al., 2014] où posséder de grands ensembles indépendants [Atserias et al., 2008]. Néanmoins, s'il existe de nombreux résultats positifs et négatifs sur les théorèmes de préservation dans le cas fini, une majorité s'intéresse à l'ordre homomorphisme. De plus, l'ensemble des classes de structures vérifiant

1. Si  $A \models \phi$  et  $A$  est une sous-structure de  $B$  alors  $B \models \phi$ .  
2.  $\phi$  est positive si elle ne contient pas de négation ni de  $\forall$ .

un théorème de préservation n'est pas encore parfaitement compris. Par exemple, pour l'ordre *sous-structure induite* une approche par densité semble peu adaptée car la classe de graphes planaires (donc peu denses) et de clique-width bornée par 4 ne possède pas de théorème de préservation [Atserias et al., 2008].

## 2.4 Pourquoi étudier les théorèmes de préservation ?

Une des motivations principales, pour l'étude des théorèmes de préservation sur les structures finies, découle du lien étroit entre structures relationnelles finies et bases de données. En effet, de nombreuses questions issues des bases de données ont été approchées avec succès en utilisant des techniques provenant de la théorie des modèles finis. Dès les années 70 [Codd, 1970], cette approche des bases de données devient populaire, et de nombreux langages de requêtes correspondent à des sous-logiques ou à des extensions de FO.

Un exemple pertinent, d'autant plus qu'il découle d'un résultat récent en théorie des modèles finis [Rossman, 2008], est l'ensemble des requêtes nommées *union of conjunctive queries*, que l'on peut aussi comprendre comme étant les requêtes écrites avec les constructions *select*, *union*, *project* et *join*. Cet ensemble de requêtes, qui semble être le plus utilisé en pratique [Abiteboul et al., 1995], est caractérisé par les formules existentielles-positives de FO. Ainsi, l'existence d'un théorème de préservation se réinterprète comme une question sur les langages de bases de données [Atserias et al., 2006]. Ces propriétés de préservation peuvent être pensées comme des formes de modèles *monde ouvert* pour les formules lorsqu'on les pense du point de vue des bases de données [Gheerbrant et al., 2014].

À l'inverse, l'étude des langages de requêtes sur les bases de données permet de valider ou d'invalidiser certains théorèmes de préservation. Ainsi, le lien entre Datalog et FO [Ajtai and Gurevich, 1994] est directement relié à des questions de préservation. Le résultat précis étant qu'une requête  $q$  exprimable à la fois en Datalog et en FO est nécessairement définissable par une formule existentielle positive, et toute requête Datalog pour  $q$  doit être bornée.

Enfin, des interprétations d'algorithmes connus en terme de théorie des modèles finis permettent de mieux

les comprendre, par exemple en ce qui concerne l'algorithme classique de *Chase* [Deutsch et al., 2008]. Cet algorithme de point fixe permet de tester et de garantir la cohérence des dépendances dans un système de base de données. Il joue un rôle important en pratique, mais aussi d'un point de vue théorique, car il permet de vérifier la correction d'un design d'une base de données.

## 2.5 Méthode et structure du rapport

L'objet d'étude est celui des théorèmes de préservation, en particulier dans le cas des structures finies où leur existence n'est pas automatique, et l'objectif est d'explicitier la structure des théorèmes de préservation, afin d'obtenir une meilleure compréhension des preuves s'appuyant sur la densité des structures. Pour cela, on s'intéresse tout d'abord aux *well quasi orderings* [Kruskal, 1972], un cadre particulièrement adapté aux théorèmes de préservations, mais qui ne capture pas tous les résultats de la littérature. Par la suite, on donne une définition plus générale, celle d'*espace logiquement pré-spectral*, pour capturer précisément les classes de structures finies possédant un théorème de préservation.

Afin de ne pas prêter à confusion, les résultats originaux sont précédés par une étoile  $\star$ , les résultats qui ne sont pas originaux seront dans la mesure du possible attribués à un article les démontrant.

Certains résultats, qui sont des adaptations de preuves déjà existantes dans la littérature à des cadres légèrement plus généraux, sont laissés en annexe afin de ne pas gêner la lecture. Toutefois, la construction du contre exemple dans l'Annexe B illustre particulièrement bien la complexité d'un théorème de préservation. Si la lecture de cette partie n'est pas nécessaire, elle est construite pour être indépendante du reste du rapport et contient beaucoup de schémas pour aider à la compréhension de la construction.

# 3 | Préliminaires

## 3.1 Théorèmes de préservation

Les théorèmes de préservation caractérisent le lien entre des fragments syntaxiques, obtenus via des restrictions sur la construction des formules, et des fragments sémantiques, définis par l'action des formules sur les modèles. On fixe une signature relationnelle  $\sigma$  contenant le symbole d'égalité. Le symbole d'égalité est interprété comme l'égalité dans toutes les structures. Sauf mention contraire, toutes les formules considérées sont closes.

**Définition 1 (Le fragment existentiel).** — On note EFO le fragment existentiel obtenu en autorisant uniquement les formules de la forme  $\exists \vec{x}.\psi$  où  $\psi$  est sans quantificateur.

**Théorème 2 (Łós-Tarski).** — Toute formule  $\phi$  préservée par extension<sup>1</sup> est équivalente à une formule EFO.

**Définition 3 (Le fragment positif).** — On note EPFO<sup>≠</sup> le sous-fragment de EFO où toute relation dans  $\psi$  apparaît sous un nombre pair de négations, excepté pour la relation d'égalité.

**Théorème 4 (Tarski-Lyndon).** — Toute formule  $\phi$  préservée par sur-structure<sup>2</sup> est équivalente à une formule EPFO<sup>≠</sup>.

**Définition 5 (Les formules existentielles positives).** — On note EPFO le sous-fragment de EFO où toute relation dans  $\psi$  apparaît positivement et où la relation d'égalité n'apparaît pas.

**Théorème 6 (H.P.T).** — Toute formule  $\phi$  préservée par homomorphisme<sup>3</sup> est équivalente à une formule EPFO.

**Exemple.** — Un exemple non trivial est la formule suivante sur l'ensemble des graphes. Les quantifications se font sur les sommets, la relation  $E$  est celle d'incidence, et  $\deg x$  est le degré de  $x$ .

$$\begin{aligned} \phi_n \triangleq (\forall x. \deg x \leq n) \implies \\ \exists x, \forall y, \exists z, z \neq x \wedge z \neq y \wedge y \neq x \wedge \\ E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge \neg E(x, z) \end{aligned}$$

Qui est équivalente à une formule EFO pour tout  $n$ .

**Remarque.** — En général, la taille des formules obtenues dépend de manière non élémentaire de la taille de la formule initiale [Dawar et al., 2007].

1.  $A \models \phi$  et  $A$  sous-structure induite de  $B$  (noté  $A \subseteq_i B$ ) implique  $B \models \phi$ .
2.  $A \models \phi$  et  $A$  sous-structure de  $B$  (noté  $A \subseteq B$ ) implique  $B \models \phi$ .
3.  $A \models \phi$  et il existe un homomorphisme  $f : A \rightarrow B$  (noté  $A \rightarrow B$ ) implique  $B \models \phi$ .

## 3.2 Théorie des modèles finis

La théorie des modèles finis consiste à étudier le lien entre formules et modèles en se restreignant aux modèles finis [Ebbinghaus and Flum, 1995]. Par exemple, deux formules closes  $\phi$  et  $\psi$  seront considérées équivalentes si elles coïncident sur tout modèle fini, ce qui donne lieu à des classes d'équivalence plus grossières sur les formules que la notion d'équivalence logique usuelle.

Contrairement à la théorie des modèles dite classique, le théorème de compacité et un grand nombre de résultats ne sont plus valides. En particulier, les preuves usuelles des théorèmes de préservation ne peuvent plus fonctionner sans modification.

### 3.2.1 Non relativisation des résultats

Un premier essai pourrait être de considérer les structures finies comme un sous ensemble des structures, et justifier que les théorèmes de préservation y restent vrais, c'est-à-dire *relativisent*. Toutefois, ce n'est clairement pas possible, comme le montre l'exemple suivant, que l'on peut décliner pour les trois ordres (extension, sur-structure, homomorphisme).

**Exemple.** — Le théorème de Łós-Tarski ne relativise pas aux structures finies, et ne relativise pas entre les structures finies.

1. L'ensemble des structures finies ne vérifie pas le théorème de Łós-Tarski [Tait, 1959].
2. L'ensemble des graphes de degré borné par 3 vérifie le théorème de Łós-Tarski [Harwath et al., 2014].
3. L'ensemble  $\mathcal{C} = \{P_k \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \cup \{C_k \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$  où  $C_k$  est un cycle de taille  $k$  et  $P_k$  est un chemin de taille  $k$  est inclus dans les graphes de degré borné 3 mais ne valide pas le théorème de Łós-Tarski.

Une question naturelle est de se demander quels théorèmes de préservation subsistent dans le cas fini, et de comparer les méthodes de preuve afin d'en tirer une compréhension plus fine.

### 3.2.2 Une preuve de Rossman

Un résultat surprenant [Rossman, 2008] est que le HPT reste valide lorsque la classe de structures est restreinte à  $\text{FinStr}(\sigma)$ , c'est-à-dire à l'ensemble des structures finies sur une signature relationnelle  $\sigma$ . La

méthode de preuve consiste à construire des modèles suffisamment saturés, et se généralise à toute classe stable par *co-retract*. Une interprétation plus topologique de ce théorème est donnée dans le livre [Nešetřil and de Mendez, 2012]. Néanmoins, cette méthode ne semble pas s'adapter pour les ordres plus restrictifs que sont  $\subseteq$  et  $\subseteq_i$ .

### 3.2.3 Un schéma de preuve récurrent

Pour le théorème de ŁÓŚ-TARSKI le théorème de préservation ne relativise pas à  $\text{FinStr}(\sigma)$  [Tait, 1959]. Néanmoins il existe un certain nombre de classes de structures finies pour lesquelles il a été démontré que le théorème reste valide. Ces preuves suivent un schéma qui consiste à s'assurer des choses suivantes : (a) les modèles minimaux des formules considérées sont *denses* (b) la classe de structures possède un nombre fini d'éléments denses. Cette méthode est très générique, et s'applique aussi bien à l'ordre homomorphisme [Atserias et al., 2006] qu'à l'ordre *sous-structure induite* [Atserias et al., 2008]. C'est pourquoi on s'intéresse principalement à ce schéma particulier dans le reste du rapport.

## 3.3 Analyse et description

### 3.3.1 Ordres et préservation

Pour chaque théorème de préservation (Łós-Tarski, Tarski-Lyndon, HPT) on peut ré-interpréter le théorème en terme de croissance par rapport à un certain ordre. En effet, la *préservation* par homomorphisme par exemple, correspond à la *croissance* pour l'ordre suivant sur les structures

$$A \leq B \iff A \rightarrow B \quad (3.1)$$

En considérant  $\mathbb{B} \triangleq \{\perp, \top\}$  avec l'ordre  $\perp \leq \top$ , une formule est dite croissante si et seulement si la fonction caractéristique associée  $\chi_\phi : A \mapsto (A \models \phi)$  est croissante. De manière équivalente, l'ensemble de tous les modèles de  $\phi$ , que l'on notera  $\llbracket \phi \rrbracket$ , est clos par le haut.

On récapitule dans le tableau suivant les différentes correspondances

| Théorème      | Ordre         | Fragment Syntaxique |
|---------------|---------------|---------------------|
| Łós-Tarski    | $\subseteq_i$ | EFO                 |
| Tarski-Lyndon | $\subseteq$   | EPFO <sup>≠</sup>   |
| H.P.T         | $\rightarrow$ | EPFO                |

On remarque que dans chaque cas, le fragment syntaxique choisi est sémantiquement monotone pour l'ordre désiré. Une autre remarque particulièrement importante est que la clôture par le haut d'un élément  $A$  notée  $\uparrow A$  et définie ci-dessous est toujours définissable par une formule du fragment syntaxique adapté.

**Définition 7 (Clôture par le haut).** — La clôture par le haut d'un sous-ensemble  $A$  d'un espace pré-ordonné  $(X, \leq)$  est définie comme suit

$$\uparrow A \triangleq \{B \mid A \leq B\} \quad (3.2)$$

**Exemple.** — L'ensemble  $X \triangleq \{B \in \text{Graph} \mid K_n \subseteq_i B\} = \uparrow K_n$  est définissable dans EFO par la formule suivante. On a noté  $K_n$  la clique de taille  $n$ .

$$\phi \triangleq \exists x_1, \dots, x_n. \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge E(x_i, x_j) \quad (3.3)$$

On remarque que la formule utilisée est en réalité dans le fragment EPFO<sup>≠</sup>, plus restrictif, car  $K_n \subseteq_i B$  si et seulement si  $K_n \subseteq B$ .

### 3.3.2 Base finie et préservation

Les ordres *sous-structure* et *sous-structure induite* sont bien fondés et il est donc possible d'étudier les modèles minimaux d'une formule  $\phi$ , ce qui forme la base de nombreuses adaptations au cas fini des théorèmes de préservation. Dans le cas de l'ordre *homomorphisme*, il faudra de plus justifier l'*existence* de modèles minimaux.

Si  $\phi$  est une formule croissante possédant une base finie  $\mathcal{B}$  de modèles minimaux, alors  $\phi$  est exprimable dans un certain fragment syntaxique (voir Figure 3.1). Ce résultat complètement générique repose sur le fait que la clôture par le haut d'un élément est définissable dans le fragment idoine.

En toute généralité, on peut écrire

$$\llbracket \phi \rrbracket = \bigcup_{A \in \text{min} \llbracket \phi \rrbracket} \uparrow A \quad (3.4)$$

L'ensemble  $\uparrow A$  est toujours définissable dans le fragment syntaxique qui nous intéresse et par conséquent le schéma de preuve se résume à vérifier que  $\llbracket \phi \rrbracket$  possède



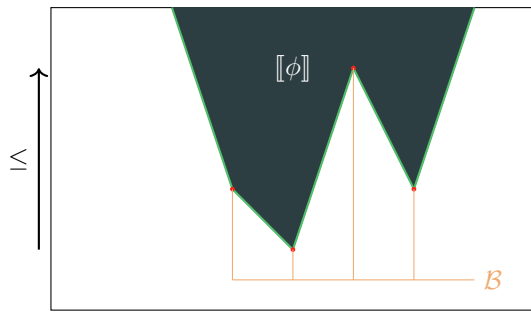


FIGURE 3.1 – Représentation graphique d’une formule croissante.

une base finie d’éléments minimaux. Attention toutefois, cette méthode de démonstration n’est pas complète, comme le montre la Figure 3.2. En effet, il se peut que dans l’ensemble des structures finies, il existe un élément minimal unique, mais qu’il ne soit pas dans la classe considérée !

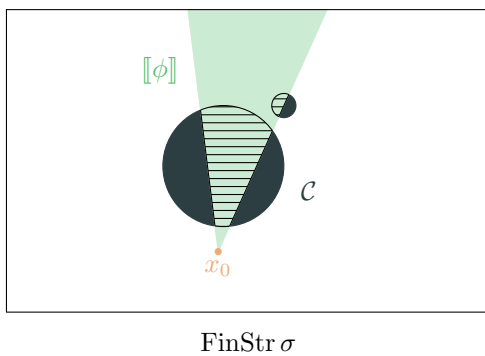


FIGURE 3.2 – L’existence d’une base finie n’est pas nécessaire.

Le lien qui existe entre la présence de bases finies et les théorèmes de préservation pousse naturellement vers la théorie des Well-Quasi-Orderings (wqo).

**Définition 8** (wqo [Kruskal, 1972]). — *Un ensemble pré-ordonné  $(X, \leq)$  est wqo si toute partie non vide  $P$  close vers le haut possède une base finie non vide d’éléments minimaux.*

Comme la monotonie d’une formule  $\phi$  implique par construction le fait que  $\llbracket \phi \rrbracket$  est clos par le haut, on peut facilement déduire le théorème suivant.

★ **Théorème 9** (wqo implique les théorèmes de préservation). — *Si  $\mathcal{C}$  est une classe qui est wqo pour l’ordre  $(\leq) \in \{\subseteq, \subseteq_i, \rightarrow\}$  alors le théorème de LÓS-TARSKI (resp. théorème de positivité de TARSKI-LYNDON, resp. HPT) est valide sur la classe  $\mathcal{C}$ .*

Il est important de remarquer que la propriété wqo relative aux sous-classes. On a donc non seulement

donné une condition suffisante pour avoir un théorème de préservation, mais aussi montré qu’il existe un sous ensemble clos par sous-classe dont les éléments vérifient les théorèmes de préservation. C’est ce que représente la Figure 3.3, dont la légende est la suivante : ■ possède un théorème de préservation, ■ ne possède pas de théorème de préservation.

Les classes de graphes et de structures sont souvent étudiées en utilisant diverses notions de densité [Nešetřil and de Mendez, 2012]. Néanmoins, on peut remarquer sur la Figure 3.4, possédant la même légende que la Figure 3.3, que ces classes ne sont pas adaptées à l’ordre  $\subseteq_i$  car il existe des classes de graphes planaires et de clique-width bornée ne possédant pas de théorème de préservation. Cela veut dire qu’une grande partie de la hiérarchie capture à la fois des classes avec et sans théorème de préservation pour  $\subseteq_i$ .

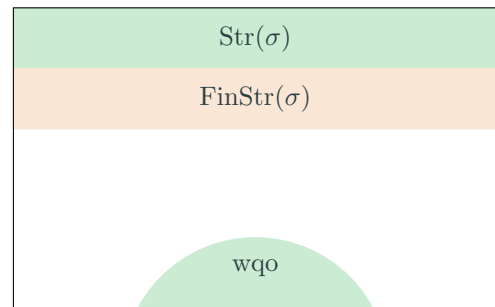


FIGURE 3.3 – Paysage grossier des théorèmes de préservation pour  $\subseteq_i$ .

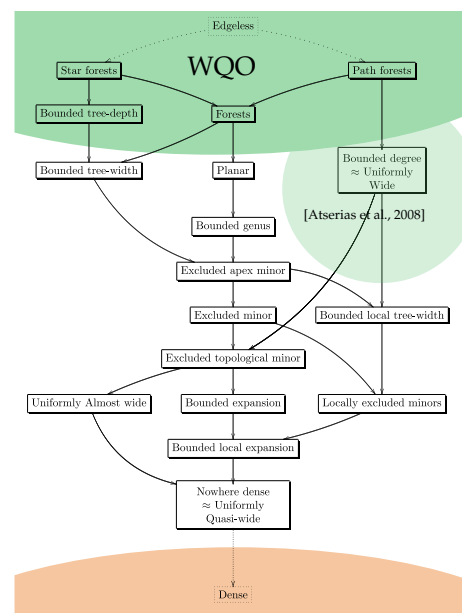


FIGURE 3.4 – Lien entre densité et préservation pour  $\subseteq_i$ .



# 4 | Espaces logiquement pré-spectraux

Dans la partie précédente, on a étudié des espaces possédant (ou non) des théorèmes de préservation. Une condition suffisante pour obtenir un tel théorème repose sur des propriétés de l'ordre sous-jacent plus que de la logique exprimant les formules. En effet, si  $(\mathcal{C}, \leq)$  est wqo, quel que soit le fragment logique utilisé<sup>1</sup> on peut obtenir un théorème de préservation de la même manière que dans le théorème 9.

Se ramener aux beaux préordres est particulièrement intéressant car ceux-ci possèdent de nombreuses caractérisations différentes [Kruskal, 1972] ainsi qu'une structure algébrique très riche. Par exemple, la propriété de wqo est préservée par produit, union disjointe, mots finis et plus encore. Cela permet de construire automatiquement de nouveaux espaces à partir des précédents, ou bien de montrer qu'un ensemble pré-ordonné est wqo en le décomposant via ces constructeurs [Goubault-Larrecq et al., 2016].

L'objectif de cette partie est d'introduire une notion similaire à celle de wqo mais qui prend en compte la logique, à savoir les espaces *logiquement pré-spectraux*, et d'obtenir des résultats structurels sur ce nouvel objet. En particulier, on désire un lien très fort entre être *logiquement pré-spectral* et posséder un théorème de préservation. Cette notion n'apparaît pas dans la littérature, mais est reliée à la notion d'espace *spectral* qui est un sujet actif de recherche en topologie [Dickmann et al., 2019].

## 4.1 Définitions

La définition d'un espace logiquement pré-spectral suit précisément le schéma de preuve qui permet de démontrer que des espaces possèdent un théorème de préservation pour une logique L. Dans ce rapport, la seule logique étudiée est  $L = \text{FO}$  et donc on ne considère que celle-ci. Néanmoins, cette définition s'adapte à d'autres logiques. Une autre manière de comprendre cette définition est de constater que c'est précisément celle de wqo où les ensembles considérés sont demandés *définissables*. L'intuition étant que des ensembles ouverts pathologiques car non observables via la logique ne sont pas à considérer.

★ **Définition 10 (Espace logiquement pré-spectral).** — Un ensemble pré-ordonné de structures  $(X, \leq)$  où  $X \subseteq \text{Str}(\sigma)$  est logiquement pré-spectral pour la logique  $\text{FO}[\sigma]$

1. À partir du moment où la clôture par le haut d'un élément est définissable dans cette logique.

lorsque

1. La clôture par le haut d'un élément est définissable.
2. Tout clos par le haut non vide et définissable possède une base finie non vide d'éléments minimaux finis.

Par construction, le théorème fondamental 11 est vérifié et on capture donc dans la structure de l'espace  $X$  les théorèmes de préservation qu'il peut vérifier. Une question naturelle est celle de la réciproque, est-ce que tout espace possédant un théorème de préservation est logiquement pré-spectral ?

★ **Théorème 11 (Théorème fondamental des espaces logiquement pré-spectraux).** — Considérons un espace logiquement pré-spectral  $(X, \leq)$  et  $\phi$  une formule croissante sur  $X$ . Alors  $\phi$  est équivalente à une disjonction finie de formules  $\psi_A$  exprimant chacune la clôture par le haut d'un élément  $A \in X$ .

En particulier, quand  $(\leq) \in \{\subseteq, \subseteq_i, \rightarrow\}$  cela implique les théorèmes de Lós-Tarski, Lyndon et le HPT.

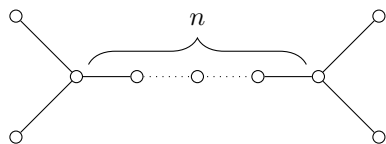
★ **Lemme 12 (Lien avec les théorèmes classiques de préservation).** — Un ensemble  $(\mathcal{C}, \leq)$  de structures finies munies d'un ordre  $(\leq) \in \{\subseteq, \subseteq_i, \rightarrow\}$  clos par le bas vérifie le théorème de Lós-Tarski (resp. Lyndon, resp. HPT) si et seulement si  $\mathcal{C}$  est logiquement pré-spectrale.

**Remarque.** — On constate séparément que  $(\text{Str}(\sigma), \leq)$  est logiquement pré-spectral pour  $(\leq) \in \{\subseteq, \subseteq_i, \rightarrow\}$ .

**Exemple (Espace non logiquement pré-spectral avec un théorème de préservation).** — Il est particulièrement aisé de construire des espaces non logiquement pré-spectraux pour lesquels il y a un théorème de préservation en évitant d'avoir une propriété de clôture par le bas. Par exemple, considérons  $X$  défini par l'ensemble des cycles simples de taille  $n$ , c'est-à-dire  $X \triangleq \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Une formule de rang  $k$  ne peut pas distinguer  $C_n$  de  $C_m$  pour  $n, m$  assez grands, et donc toute formule croissante est équivalente à une disjonction entre un nombre fini de  $C_n$  valides et une partie infinie codée par un nombre minimal d'éléments à contenir.

On peut se demander si les espaces logiquement pré-spectraux sont plus généraux que les espaces wqo, et la réponse est positive sans grande surprise, car un ensemble non définissable n'est nullement restreint.

**Exemple.** — Considérons l'ensemble  $X$  des graphes de degré borné par 3 pour l'ordre  $\subseteq_i$ . L'espace  $(X, \subseteq_i)$  n'est pas wqo comme le montre l'antichaine  $F_n$  infinie ci-dessous. En revanche, cet espace est logiquement pré-spectral pour FO car il possède un théorème de préservation [Atserias et al., 2008].

FIGURE 4.1 – L’antichaîne  $F_n$  pour  $\subseteq_i$ .

Malheureusement, cette différence met aussi en lumière des caractérisations des wqo qui ne sont pas facilement adaptées aux espaces logiquement pré-spectraux. En effet, un espace est logiquement pré-spectral en fonction du comportement de *certaines* clos vers le haut, ce qui rend par exemple une caractérisation en termes de *mauvaises séquences* [Kruskal, 1972] peu intuitive et surtout peu utilisable en pratique. Cela motive la section suivante qui développe les outils topologiques adaptés au raisonnement sur les espaces logiquement pré-spectraux, en s’inspirant des travaux sur les espaces Nœthériens.

## 4.2 Constructions topologiques

Comme les propriétés des espaces logiquement pré-spectraux sont centrées sur certains clos par le haut, il est naturel de considérer ces espaces d’un point de vue topologique en posant  $\mathcal{O}(X) \triangleq \{U \subseteq X \mid \uparrow U = U\}$ . Ainsi, les ouverts sont les clos par le haut, les fermés sont les clos par le bas pour l’ordre  $\leq$  qui était posé sur  $X$ . Cette topologie associée à  $(\leq)$  est la topologie d’Alexandroff qui possède de nombreuses particularités (stable par intersections infinies, existence d’ouvert minimal contenant un point, etc). Si certaines constructions nécessiteront de revenir à la notion d’ordre, nous allons maintenant essayer de dégager une description purement topologique des espaces logiquement pré-spectraux, à la manière dont les espaces Nœthériens [Goubault-Larrecq, 2010] sont une description topologique des espaces wqo.

Le point central dans la définition d’espace logiquement pré-spectral et même de wqo est la finitude de certaines constructions (antichaines, bases finies, mauvaises séquences). Cette finitude correspond parfaitement à la notion de compacité dans les espaces topologiques.

**Propriété 13 (Compacité et base finies).** — Soit  $(X, \leq)$  un ensemble pré-ordonné et  $Y \in \mathcal{O}(X)$ . L’ensemble  $Y$  possède une base finie d’éléments minimaux si et seulement si  $Y$

est un compact de  $X$  pour la topologie  $\mathcal{O}(X)$ .

Maintenant que nous pouvons reformuler la définition d’espace logiquement pré-spectral en termes topologiques, une notion apparaît très similaire, celle d’espace spectral.

### 4.2.1 Espaces spectraux

Les espaces spectraux apparaissent naturellement en algèbre mais aussi en logique via l’espace des types d’une structure. Les espaces que nous considérons sont en pratique des parties de  $\text{FinStr}(\sigma)$  et donc n’ont a priori aucune chance d’être sobres. Comme l’opérateur de sobrification préserve la topologie, on définit simplement un espace pré-spectral comme étant un espace dont le sobrifié est spectral, ou plus simplement un espace défini comme suit. Cette définition ne semble pas exister dans la littérature, et on l’introduit pour expliquer d’où vient le nom d’espace logiquement pré-spectral.

**Définition 14 (Espace spectral [Dickmann et al., 2019]).** — Soit  $(X, \mathcal{O})$  un espace topologique sobre. On dit que  $X$  est spectral si et seulement s’il existe  $\mathfrak{B}$  une sous-base de  $\mathcal{O}$  vérifiant

1. Tout élément de  $\mathfrak{B}$  est compact.
2. L’ensemble  $\mathfrak{B}$  est stable par intersection finie.
3. L’ensemble  $\mathfrak{B}$  est stable par union finie.
4.  $X \in \mathfrak{B}$ .

★ **Définition 15 (Espace pré-spectral).** — Soit  $(X, \mathcal{O})$  un espace topologique. On dit que  $X$  est pré-spectral si et seulement s’il existe  $\mathfrak{B}$  une sous-base de  $\mathcal{O}$  vérifiant

1. Tout élément de  $\mathfrak{B}$  est compact.
2. L’ensemble  $\mathfrak{B}$  est stable par intersection finie.
3. L’ensemble  $\mathfrak{B}$  est stable par union finie.
4.  $X \in \mathfrak{B}$ .

On peut, avec ces notions topologiques, caractériser les espaces logiquement pré-spectraux afin de les généraliser à des espaces topologiques et non plus simplement des ensembles pré-ordonnés.

★ **Propriété 16 (Caractérisation des espaces logiquement pré-spectraux).** — Un espace  $(X, \leq)$  est logiquement pré-spectral si et seulement si  $X$  est pré-spectral avec la base  $\mathfrak{B} \triangleq \{U \in \mathcal{O}(X) \mid \exists \phi \in \text{FO}, U = \llbracket \phi \rrbracket_X\}$ .

On a noté  $\llbracket \phi \rrbracket_X \triangleq \{A \in X \mid A \models \phi\}$  ce qui nous permet de parler de sous-espace sans ambiguïté.

**Remarque.** — Cette sous-base est en réalité une base et le fait que FO soit stable par conjonction et disjonction binaires est équivalent au fait que la base  $\mathfrak{B}$  soit stable par intersection et union finies. Ainsi dans une grande majorité des preuves, on vérifiera simplement que les éléments de  $\mathfrak{B}$  sont compacts.

Au vu des propriétés de stabilité de  $\mathfrak{B}$ , on remarque immédiatement qu'un ouvert de  $X$  est compact si et seulement s'il est définissable. Cela donne donc un second point de vue, plus théorique, qui permet de démontrer des résultats de définissabilité en utilisant des propriétés de compacité.

**Propriété 17 (Base d'ouverts d'une topologie d'Alexandroff).** — Si la topologie sur la classe  $\mathcal{C} \subseteq \text{FinStr}(\sigma)$  est définie comme la topologie d'Alexandroff en partant d'un ordre  $\leq$ , alors l'ensemble des ouverts définissables est une base si et seulement si la clôture par le haut de tout point est définissable.

Il peut alors être intéressant de faire le lien entre espace logiquement pré-spectral et des propriétés plus fortes comme être Nœthérien. Il se trouve que cela relève simplement de l'expressivité de la logique utilisée.

★ **Propriété 18 (Lien avec  $\text{wqo}$  et Nœthérien).** — Soit  $X$  un espace possédant une base d'ouverts définissables dans une logique  $L$ . On a équivalence entre les deux propriétés suivantes

1. L'espace  $(X, \mathcal{O})$  est Nœthérien.
2. L'espace  $(X, \mathcal{O})$  est logiquement pré-spectral et tout ouvert est définissable.

Dans toute la suite, on s'intéresse uniquement aux espaces logiquement pré-spectraux sur des structures finies. De plus, dès que possible, on utilisera la *continuité* et les *ouverts* plutôt que la *monotonie* et les *clos par le haut* afin d'avoir un vocabulaire plus proche de la topologie.

## 4.3 Théorèmes fondamentaux

### 4.3.1 Préservation par interprétation

Une première construction, qui intervient dans les propriétés de stabilité des espaces logiquement pré-spectraux, est celle d'interprétation. En effet, une fonction continue et surjective va permettre de transporter la partie *topologique* des espaces mais ne peut pas expliquer quels ensembles sont définissables. Pour cela, on rappelle la notion d'interprétation.

**Définition 19 (FO-Interprétation).** — Une FO-interprétation  $\Gamma$  de  $X \subseteq \text{Str}(\sigma)$  vers  $Y \subseteq \text{Str}(\tau)$  est la donnée de

1. Une formule close  $\Delta$ .
2. Pour chaque relation  $R$  dans  $\tau$  d'arité  $k$  la donnée d'une formule  $\phi_R$  possédant  $k$  variables libres.
3. Une formule  $\phi_{\text{dom}}$  possédant une variable libre.

L'image par  $\Gamma$  d'une structure  $A$  est définie si  $A \models \Delta$  par le domaine  $B \triangleq \{a \in A \mid A \models \phi_{\text{dom}}(a)\}$  et les relations sur  $B$  sont obtenues en interprétant les formules  $\phi_R$  dans  $A$ .

Cette définition de fonctions transportant la logique donne immédiatement une propriété de préservation, cruciale dans le reste du rapport.

**Propriété 20 (Propriété fondamentale des FO-interprétations).** — Soit  $\Gamma : X \rightarrow Y$  une FO-interprétation et  $\phi$  une formule sur  $Y$ . On peut construire  $\Gamma(\phi)$  une formule sur  $X$  de telle sorte que pour tout  $A \in X$ .

$$\Gamma(A) \models \phi \iff A \models \Gamma(\phi) \quad (4.1)$$

★ **Propriété 21 (Préservation par morphisme).** — Soit  $\Gamma$  une FO-interprétation d'un ensemble  $\mathcal{C}$  de  $\tau$ -structures vers un ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\sigma$ -structures dont  $\mathfrak{B} = \{U \mid \exists \phi \in \text{FO}[\sigma], U = \llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{D}}\}$  est une sous-base. Si  $\Gamma$  est continue<sup>2</sup> et surjective et  $\mathcal{C}$  est logiquement pré-spectrale, alors  $\mathcal{D}$  est logiquement pré-spectrale.

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que tous les éléments de  $\mathfrak{B}$  sont compacts. Soit  $U \in \mathfrak{B}$ , on a un  $\psi$  tel que  $\llbracket \psi \rrbracket = U$ . Comme  $\Gamma$  est une FO-interprétation on sait que

$$\Gamma^{-1}(U) = \llbracket \Gamma\psi \rrbracket \quad (4.2)$$

De plus, comme  $\Gamma$  est continue, on sait que  $V \triangleq \llbracket \Gamma\psi \rrbracket$ , et  $V$  est un ouvert de  $\mathcal{C}$ . On a donc  $V$  compact par hypothèse. Comme  $\Gamma$  est continue, on sait que  $\Gamma(V)$  est compact, et comme  $\Gamma$  est surjective, on sait de plus que  $\Gamma(V) = U$ .  $\square$

**Remarque (Nécessité de l'existence préalable de  $\mathfrak{B}$ ).** — Si on retire l'hypothèse que  $B$  est une sous-base de  $\mathcal{D}$  alors le théorème devient faux. Considérons  $\sigma_1 \triangleq \{(E, 2)\}$  et  $\sigma_2 \triangleq \emptyset$  deux signatures. Posons  $\mathcal{C}$  l'ensemble des graphes finis simples avec l'ordre homomorphisme.

On sait que  $\mathcal{C}$  est logiquement pré-spectral sur  $\text{FO}[\sigma_1]$  avec cet ordre. Mais il est clair que  $\text{FO}[\sigma_2]$  ne peut parler que de la cardinalité du graphe, et un argument simple montre

2. Pour tout ouvert  $U$ ,  $\Gamma^{-1}(U)$  est ouvert.

que la fonction  $f = id$  de  $(\mathcal{C}, \sigma_1)$  vers  $(\mathcal{C}, \sigma_2)$  est une FO-interprétation surjective, continue, mais  $(\mathcal{C}, \sigma_2)$  n'est pas logiquement pré-spectral.

Une application non triviale de cette préservation est de construire une FO-interprétation continue d'un espace  $X$  vers un espace  $Y$  dont on sait qu'il n'est pas logiquement pré-spectral. La propriété de préservation nous donne alors un résultat *néгатif* pour  $X$ .

★ **Théorème 22 (L'espace  $(\text{Graph}, \subseteq)$  n'est pas logiquement pré-spectral).** — *L'espace des graphes muni de l'ordre d'inclusion n'est pas logiquement pré-spectral.*

Une seconde application est la relation entre les ordres  $\subseteq_i, \subseteq$  et  $\rightarrow$  vis-à-vis des théorèmes de préservation.

★ **Propriété 23 (Implications pour les espaces logiquement pré-spectral).** — *Soit  $\mathcal{C}$  un espace de structures, alors*  
 (i)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (iii).  
 (i)  $(\mathcal{C}, \subseteq_i)$  est logiquement pré-spectral.  
 (ii)  $(\mathcal{C}, \subseteq)$  est logiquement pré-spectral.  
 (iii)  $(\mathcal{C}, \rightarrow)$  est logiquement pré-spectral.

**Remarque.** — *Cela permet de compléter la recherche sur le sujet [Ajtai and Gurevich, 1994, Stolboushkin, 1995, Rossman, 2008] en complétant le paysage suivant pour les graphes finis*

|               | Lós-Tarski | Lyndon | HPT |
|---------------|------------|--------|-----|
| Graphes Finis | ✗          | ✗      | ✓   |

### 4.3.2 Préservation par restriction

On a déjà donné des exemples de non relativisation des théorèmes de préservation, mais après avoir posé les définitions d'espaces logiquement pré-spectraux on constate qu'il est possible d'obtenir dans certains cas des relativisations automatiques. Cela permet de retrouver certains résultats déjà obtenus dans la littérature d'une manière plus simple.

★ **Propriété 24 (Préservation par intersection avec un fermé).** — *Soit  $\mathcal{C}$  un espace logiquement pré-spectral avec signature  $\sigma$  et  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$  qui définit un fermé  $F$  de  $\mathcal{C}$ . Alors  $\mathcal{D} \triangleq (\llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{C}}, \sigma)$  est logiquement pré-spectral pour la topologie induite.*

*Démonstration.* Dans un premier temps, il est clair que la base d'ouverts définissables de  $\mathcal{C}$  se transporte à  $\mathcal{D}$  par une simple intersection. Il reste donc à montrer que tout ouvert définissable de  $\mathcal{D}$  est compact.

Soit  $U = \llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{D}}$  un ouvert définissable de  $\mathcal{D}$ , par définition de la topologie induite  $U = V \cap F$  avec  $V$  ouvert de  $\mathcal{C}$ .

— Considérons  $\theta \triangleq \phi \vee \neg\psi$ ,  $W \triangleq \llbracket \theta \rrbracket \cap \mathcal{C}$  et montrons que  $W$  est ouvert dans  $\mathcal{C}$ . L'intuition derrière cette construction se trouve Figure 4.2.

$$\begin{aligned} W &= ((V \cap F) \cup F^c) \cap \mathcal{C} \\ &= (V \cup F^c) \cap \mathcal{C} \\ &= (V \cap \mathcal{C}) \cup (F^c \cap \mathcal{C}) \end{aligned}$$

Or  $V \cap \mathcal{C}$  et  $F^c \cap \mathcal{C}$  sont deux ouverts de  $\mathcal{C}$  donc  $W$  est bien ouvert.

— Comme  $W$  est définissable et ouvert, c'est un compact de  $\mathcal{C}$ .  
 — Or, on sait que  $W \cap F$  est l'intersection d'un compact de  $\mathcal{C}$  et d'un fermé de  $\mathcal{C}$  et donc est compact de  $\mathcal{C}$  puis un compact de  $\mathcal{D}$ .  
 — Par la suite on remarque que  $W \cap F = U$  et donc que  $U$  est un compact de  $\mathcal{D}$ .  $\square$

**Remarque.** — *Attention, compact n'implique ni séparé, ni fermé dans les espaces que l'on considère. En revanche, l'intersection d'un compact et d'un fermé est bien compacte.*

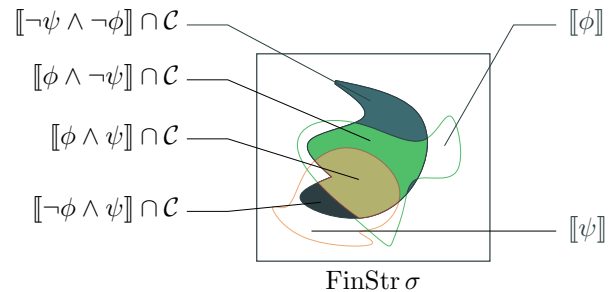


FIGURE 4.2 – La motivation pour  $\theta \triangleq \neg\psi \vee \phi$ .

★ **Propriété 25 (Préservation par intersection avec un ouvert).** — *Soit  $\mathcal{C}$  un espace logiquement pré-spectral de signature  $\sigma$  et  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$  une formule définissant un ouvert de  $\mathcal{C}$ . Alors  $\mathcal{D} \triangleq \mathcal{C} \cap \llbracket \psi \rrbracket$  est logiquement pré-spectral.*

*Démonstration.* On remarque que l'intersection de la base des ouverts définissables avec  $\llbracket \psi \rrbracket$  est toujours une base d'ouverts définissables de  $\mathcal{D}$ .

De plus, on peut construire une FO-interprétation  $\Gamma$  continue et surjective de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$ , qui est l'identité avec son domaine restreint à  $\psi$ .

- L'interprétation  $\Gamma$  est surjective par construction.
- Pour tout  $U$  ouvert de  $\mathcal{D}$ ,  $\Gamma^{-1}(U) = U \cup \llbracket \psi \rrbracket \cap \mathcal{C}$ , or par définition de la topologie induite il existe  $V$  ouvert de  $\mathcal{C}$  tel que  $U = V \cap \llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{D}}$  donc  $\Gamma^{-1}(U) = V \cup \llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{C}}$  est une union de deux ouverts et donc ouvert.

Ainsi la fonction  $\Gamma$  est continue.  $\square$

**Exemple.** — *L'ensemble des graphes contenant un chemin de taille  $k$  est logiquement pré-spectral pour l'ordre homomorphisme.*

★ **Propriété 26 (Restriction sans alternation).** — *Soit  $\mathcal{C}$  un espace logiquement pré-spectral avec signature  $\sigma$  et  $X$  une combinaison booléenne finie d'ouverts définissables de  $\mathcal{C}$ . L'espace  $X$ , avec signature  $\sigma$  et la topologie induite, est logiquement pré-spectral.*

**Remarque.** — *On peut se demander s'il existe un théorème de type tout sous-ensemble définissable d'un espace logiquement pré-spectral est logiquement pré-spectral, en tentant par exemple de démontrer l'universalité des formules définissant des ouverts. Malheureusement, c'est sans espoir dans le cas général. comme le montre l'exemple En effet,  $\mathcal{C} = \{G \mid \deg G \leq 2\}$  est logiquement pré-spectral pour l'ordre homomorphisme, mais  $\mathcal{D} = \{G \mid \forall x \in G, \deg(x) = 2\}$  n'est pas logiquement pré-spectral pour l'ordre homomorphisme.*

★ **Propriété 27 (Exclusion).** — *Si  $\mathcal{C}$  est logiquement pré-spectral sur une signature  $\sigma$  pour une topologie issue d'un ordre  $\leq$ , que  $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{C}$  alors  $\mathcal{D} \triangleq \{u \in \mathcal{C} \mid \forall i, \neg(u_i \leq u)\}$  avec l'ordre induit et la topologie induite est logiquement pré-spectrale.*

**Démonstration.** Comme la topologie provient d'un ordre  $\leq$ , il est clair que  $\uparrow(u_1, \dots, u_n)$  est un ouvert compact, et donc c'est un ouvert définissable. En utilisant la propriété 24 on déduit que l'exclusion est logiquement pré-spectrale pour l'ordre restreint (qui donne la topologie induite).  $\square$

**Exemple.** — *L'espace  $(\text{Graph} \setminus \uparrow P_4, \rightarrow)$  est logiquement pré-spectral.*

**Remarque.** — *Attention toutefois, il faut que l'espace soit logiquement pré-spectral pour l'ordre utilisé. Par exemple, l'exclusion de mineurs ou de mineurs topologiques n'entre dans le cadre d'application de cette propriété que si la propriété être un mineur de  $u$  est définissable et close par le haut pour l'ordre associé à l'espace.*

## 4.4 Densité et pré-spectralité

La notion de densité pour les graphes est un vaste sujet de recherche qui possède des applications combinatoires, logiques, et algorithmiques [Nešetřil and de Mendez, 2012]. En particulier, il a été démontré que des classes de graphes *nowhere dense*, closes par sous-graphe induit et stables par union disjointe possèdent un théorème de préservation [Nešetřil and Ossona de Mendez, 2010]. La notion de *nowhere dense* étant très générique, incluant par exemple les classes construites par exclusion de mineur ou de mineur topologique.

Dans cette section on démontre que pour les ordres  $\subseteq_i$  et  $\subseteq$ , une classe close par le bas qui n'est pas *nowhere dense* ne peut pas être pré-spectrale. Dans la littérature, une classe qui n'est pas *nowhere dense* est dite *somewhere dense*.

On ne donne pas la définition exacte de *somewhere dense*, qui repose sur la notion de mineur topologique [Nešetřil and Ossona de Mendez, 2010]. En revanche, on utilise une caractérisation en terme de sous-division dans le cas plus simple où la classe est close par sous-graphe. Cette caractérisation est rappelée dans le Lemme 28.

**Lemme 28 (Somewhere dense classes et sous-divisions [Drange et al., 2014]).** — *Si  $\mathcal{C}$  est somewhere dense et close par sous-graphe alors il existe un  $r$  tel que pour tout graphe  $G$ , une  $r$ -sous-division de  $G$  est dans  $\mathcal{C}$ .*

$$\text{Sub}_r(\text{Graph}) \subseteq \mathcal{C} \quad (4.3)$$

En utilisant une simple réduction, dont le principe s'inspire d'un article de complexité [Kreutzer and Dawar, 2009] on peut alors démontrer qu'une classe *dense* ne pourra jamais être pré-spectrale pour l'ordre monomorphisme, c'est-à-dire pour  $\subseteq$ .

★ **Théorème 29 (Une classe somewhere dense n'est pas logiquement pré-spectrale).** — *Si une classe  $\mathcal{C}$  de graphe est somewhere dense et close par sous-graphe, alors elle n'est pas logiquement pré-spectrale pour l'ordre monomorphisme.*

**Démonstration.** Soit  $r$  tel que tout graphe possède une  $r$ -subdivision dans  $\mathcal{C}$ . On pose  $\mathcal{G}$  l'ensemble des graphes ordonnés par monomorphisme.

- (1) On commence par construire une fonction  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$ .



Pour cela, si  $G$  est un graphe, on construit  $G'$  où chaque sommet se voit ajouter 3 voisins.

Ce graphe  $G'$  est dans  $\text{Graph}$ , et donc il existe une  $r$ -subdivision de  $G'$ , notée  $G''$  qui est dans  $\mathcal{C}$ . On pose  $f(G) \triangleq G''$ .

Remarquons que le degré des nœuds n'est pas changé lorsqu'on prend une subdivision.

- (2) On construit désormais une interprétation  $FO$  notée  $\Gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ .

Pour cela, on définit

- $\phi_{\text{dom}}(x) \triangleq d(x) \geq 3$
- $\phi_E(x, y)$  caractérisant l'existence d'un chemin de  $x$  à  $y$  de longueur exactement  $r$

Il est clair que  $f$  est injective et  $\Gamma$  surjective, comme l'interprétation  $\Gamma$  est monotone, on peut conclure que  $\mathcal{C}$  n'est pas logiquement pré-spectral.  $\square$

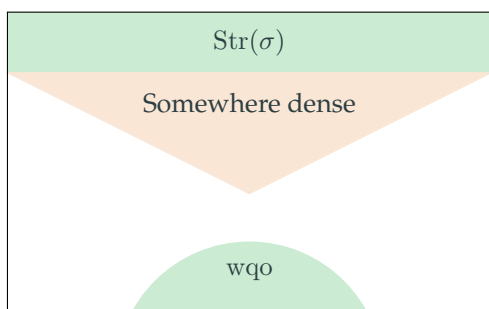


FIGURE 4.3 – Paysage grossier des théorèmes de préservation pour  $\subseteq$

On termine cette section en montrant que le paysage laissé blanc est effectivement compliqué, il existe par exemple une classe de graphes planaires finis de *clique-width* bornée par 4 (et donc très loin d'être dense) qui n'est pas logiquement pré-spectrale. La construction complète est détaillée en annexe dans le Chapitre B. Le paysage des théorèmes de préservation est donc celui décrit Figure 4.3. Un résultat n'apparaît pas sur la figure, à savoir la pré-spectralité des classes de structures de degré borné. En effet, ce résultat découle immédiatement de [Atserias et al., 2008] en utilisant la Propriété 23.

★ **Propriété 30 (Graphes planaires simples).** — *L'ensemble des graphes planaires simples ne possède pas de théorème de préservation pour l'ordre  $\subseteq$  dans le cas fini comme dans le cas infini.*

**Remarque.** — *On peut donc conclure au même schéma général pour l'ordre sous-graphe induit au vu de la Propriété 23.*

## 4.5 Étiquetage

Une construction qui apparaît naturellement lors de l'étude des wqo est celle de *coloriage* et d'*étiquetage*. On considère ci-après des étiquetages, cela ne restreint pas la généralité car un coloriage avec  $k$  couleurs correspond à un étiquetage avec  $2^k$  étiquettes. Bien que ces constructions ne préservent pas les propriétés de beaux préordres, elle semble naturelle dans beaucoup de cas pratiques [Pouzet, 1972].

**Définition 31 (Étiquetage libre).** — *Soit  $\mathcal{C}$  une classe de structures sur une signature relationnelle finie  $\sigma$ . Soit  $L \triangleq \{l_1, \dots, l_k\}$  un ensemble fini de  $k$  étiquettes. On note  $\mathcal{D}(L)$  l'ensemble des structures sur  $\sigma \uplus \{l_1, \dots, l_k\}$  telles que la projection sur  $\sigma$  soit dans  $\mathcal{C}$ , et telles que chaque élément possède une unique étiquette.*

**Remarque.** — *Pour les ordres  $\subseteq, \subseteq_i$  et  $\rightarrow$ , il y a une notion naturelle d'extension à un nombre fini d'étiquettes, qui demande à préserver les étiquettes. On note  $\leq_L$  l'extension naturelle de  $\leq$  à  $\mathcal{D}(L)$ .*

**Définition 32 ( $k$ -wqo).** — *Un ensemble  $(X, \leq)$  est dit  $k$ -wqo lorsque  $(X(L), \leq_L)$  est wqo pour  $L$  contenant  $k$  étiquettes.*

**Définition 33 ( $k$ -logiquement pré-spectral).** — *Un ensemble  $(\mathcal{C}, \leq)$  est dit  $k$ -logiquement pré-spectral lorsque  $(\mathcal{C}(L), \leq_L)$  est logiquement pré-spectral pour  $L$  contenant  $k$  étiquettes.*

**Exemple.** — *Un ensemble de structures clos par sous-structure et de degré borné est logiquement pré-spectral. Or, ajouter des prédicats unaires (étiquettes) ne change pas le degré. Donc tout ensemble de structures clos par sous-structure et de degré borné est  $k$ -logiquement pré-spectral pour tout  $k$  fini.*

# 5 | Constructeurs binaires

Dans ce chapitre on démontre des théorèmes de stabilité pour les opérations algébriques usuelles (produit, union disjointe) des espaces logiquement pré-spectraux. Contrairement aux espaces Noéthériens ou aux ensembles wqo, les preuves reposent essentiellement sur des arguments logiques, et la méthode de preuve développée pour le produit se généralise agréablement à d'autres cas.

Le résultat technique clef est le théorème de décomposition de Feferman-Vaught que l'on peut trouver sous une forme très générale [Chang and Keisler, 1990] et d'une manière plus algorithmique [Makowsky, 2004] dans la littérature. À l'aide de cet outil, on ramène l'étude des ensembles définissables du produit aux ensembles définissables des composantes après quelques détails techniques. Cette méthode est nouvelle et n'apparaît pas dans la littérature.

Remarquons que la notion de produit pour un ordre nécessite de construire les éléments (des paires) mais aussi un ordre (l'ordre produit), et dans le cas des espaces logiquement pré-spectraux, il faut aussi définir la nouvelle signature  $\sigma$  sur laquelle considérer la logique FO. On peut pour cela se laisser guider par la vision catégorique des constructions, qui donne une idée assez précise des signatures à poser.

## 5.1 Union disjointe

La première construction étudiée est l'union disjointe car c'est le cas le plus élémentaire, et que le résultat est très intuitif. En effet, évaluer une formule sur une union disjointe revient simplement à l'évaluer sur chaque partie, et agréger les résultats. Ainsi, l'existence de base de modèles finis se transporte immédiatement. La preuve donnée ici est topologique et plus générale, mais repose directement sur cette intuition.

**Définition 34 (Union disjointe de classes).** — Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont deux classes de structures alors  $\mathcal{C} \uplus \mathcal{D}$  est défini sur la signature  $\sigma_{\mathcal{C}} \uplus \sigma_{\mathcal{D}} \uplus \{P\}$  et construit comme suit

$$\mathcal{C} \uplus \mathcal{D} \triangleq \{C \text{ avec } P \text{ valide} \mid C \in \mathcal{C}\} \cup \{D \text{ avec } P \text{ invalide} \mid D \in \mathcal{D}\}$$

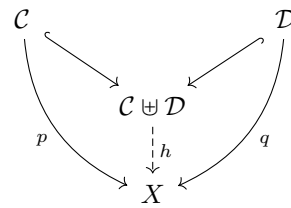
La topologie usuelle sur l'union disjointe est obtenue à partir des unions disjointes d'ouverts de  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{D}$ .

On peut se convaincre que cette construction représente bien une union disjointe de classes via les pro-

priétés suivantes, à savoir que les injections canoniques existent, et qu'il y a dans un certain sens une propriété universelle.

**Propriété 35 (Injections canoniques).** — Les injections de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{C} \uplus \mathcal{D}$  sont des FO-interprétations continues.

**Propriété 36 (Propriété universelle de l'union disjointe).** — Soit  $X$  une classe de structures munie de deux FO-interprétations continues  $p : \mathcal{C} \rightarrow X$  et  $q : \mathcal{D} \rightarrow X$ . Il existe une unique FO-interprétation continue  $h : \mathcal{C} \uplus \mathcal{D} \rightarrow X$  qui fait commuter le diagramme suivant



★ **Théorème 37 (Stabilité par union disjointe).** — L'union disjointe de deux espaces logiquement pré-spectraux est logiquement pré-spectrale.

*Démonstration.* Considérons  $\phi$  une formule sur la signature  $\sigma_{\mathcal{C}} \uplus \sigma_{\mathcal{D}} \uplus \{P\}$  croissante pour l'ordre sur  $\mathcal{C} \uplus \mathcal{D}$ . Notons de plus  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  et  $\Gamma_{\mathcal{D}}$  les injections canoniques.

Par définition de l'union disjointe, on obtient deux ensembles  $A \subseteq \mathcal{C}$  et  $B \subseteq \mathcal{D}$  tels que

$$\llbracket \phi \rrbracket = \Gamma_{\mathcal{C}}(A) \uplus \Gamma_{\mathcal{D}}(B) \tag{5.1}$$

Comme  $\Gamma_{\mathcal{C}}^{-1}(\Gamma_{\mathcal{D}}(B)) = \emptyset$  et  $\Gamma_{\mathcal{D}}^{-1}(\Gamma_{\mathcal{C}}(A)) = \emptyset$  on obtient donc  $A = \Gamma_{\mathcal{C}}^{-1}(\llbracket \phi \rrbracket)$  et  $B = \Gamma_{\mathcal{D}}^{-1}(\llbracket \phi \rrbracket)$ .

Or ces deux ensembles sont des ouverts définissables donc compacts. Les injections étant continues, on déduit que  $\llbracket \phi \rrbracket$  est une union de deux compacts, et est donc compacte. □

**Exemple.** — Considérons  $\mathcal{C} \triangleq \{K_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 3}\} \cup \{P_k \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ . On peut montrer que cet ensemble est logiquement pré-spectral pour l'ordre  $\subseteq$  en le montrant équivalent à une union disjointe, le prédicat  $P$  étant défini comme l'existence d'un sommet de degré supérieur strictement à 2.

## 5.2 Produit

Pour l'union disjointe, les injections canoniques donnent énormément d'informations et permettent de déduire rapidement une propriété d'espace logiquement pré-spectral. Cela vient du fait qu'un ouvert de



l'espace est une union disjointe d'ouverts. Au contraire, un ouvert d'un espace produit n'est pas nécessairement un produit d'ouverts, ce qui crée une complexité additionnelle.

**Définition 38 (Espace produit).** — Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux espaces de structures respectivement sur une signature  $\sigma$  et  $\tau$ . L'espace  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  est un espace de structures sur la signature  $\sigma \uplus \tau \uplus \{<\}$  construit comme suit.

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \triangleq \{(A, B) \mid A \in \mathcal{C} \wedge B \in \mathcal{D}\} \quad (5.2)$$

Avec  $(A, B)$  la structure obtenue comme l'union disjointe de  $A$  et  $B$ , augmentée de  $a < b$  pour tout  $a \in A$  et  $b \in B$ .

Afin de montrer que les espaces construits par produit sont logiquement pré-spectraux, une première étape est de comprendre comment décomposer les formules à la manière de ce qui a été fait pour l'union disjointe. Pour cela, un théorème classique est celui de Feferman-Vaught [Makowsky, 2004]. Il faut remarquer que la complexité des formules à vérifier sur les composantes va dépendre de manière non élémentaire de la taille de la formule initiale [Dawar et al., 2007].

**Théorème 39 (Feferman-Vaught adapté).** — Soit  $\phi$  une formule sur  $\sigma_X \uplus \sigma_Y$ , alors il existe  $\gamma : \{0, 1\}^{2^m} \rightarrow \{0, 1\}$  et  $\psi_X^i, \psi_Y^i$  des formules sur  $X$  et  $Y$  telles que pour tout  $A, B$  structures  $(A, B) \models \phi$  si et seulement si  $\gamma(A \models \psi_X^i; A \models \psi_Y^i) = 1$ .

La preuve de ce théorème se trouve en Annexe A et nécessite une attention particulière. En effet, les preuves usuelles de résultats de type Feferman-Vaught utilisent une induction sur la structure de la formule, et donc doivent gérer les variables libres. Il faut donc être méticuleux sur la gestion des substitutions dans les formules à évaluer sur chaque composante.

Fort de cette adaptation du résultat de décomposition, il est alors naturel de tenter le raisonnement suivant : (a) Posons  $U = \llbracket \phi \rrbracket$  et décomposons  $\phi$  via notre précédent résultat (b) On peut donc étudier les projections de  $U$  sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  qui sont ouvertes et définissables, donc compactes par hypothèse. Néanmoins, l'étude simple des projections ne permet pas de déduire la compacité, comme l'illustre la Figure 5.1. Pour résoudre ce problème, on peut demander à ce que la topologie vienne d'un ordre (ce qui est le cas dans nos exemples) et utiliser des constructions spécifiques afin de construire les plus grands pavés ouverts définissables inclus dans  $U$ .

$$\begin{aligned} Z &= \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ U &= \{(x, y) \in Z \mid x + y \geq 1, x \geq 0.5, y \geq 0.5\} \\ A &= \{(x, 1 - x) \mid x \in [0.5, 1]\} \end{aligned}$$

FIGURE 5.1 – Un ouvert non compact dont les projections sont compactes

**★ Théorème 40 (Stabilité par produit).** — Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces logiquement pré-spectraux sur une topologie d'Alexandrov, alors  $X \times Y$  est logiquement pré-spectral sur la signature  $\sigma_X \uplus \sigma_Y \uplus \{<\}$  et la topologie produit.

*Démonstration.* Considérons  $X$  et  $Y$  deux espaces logiquement pré-spectraux dont la topologie est d'Alexandrov pour des ordres  $\leq_X$  et  $\leq_Y$ . Une base d'ouverts pour  $X \times Y$  se construit à partir d'une base d'ouverts de  $X$  et de  $Y$ . Ainsi, l'ensemble des formules sur  $X \times Y$  permet bien de construire une sous-base d'ouverts. Reste à montrer que ces ouverts sont compacts dans  $X \times Y$ .

Considérons  $\phi$  une formule sur  $\sigma_X \uplus \sigma_Y \uplus \{<\}$  telle que  $\llbracket \phi \rrbracket = U$  est un ouvert de  $X \times Y$ .

De part le théorème de Feferman-Vaught, on dispose d'une famille de formules  $\psi_X^i$ , et  $\psi_Y^i$  respectivement sur  $X$  et  $Y$  et d'une fonction booléenne  $\gamma$  telles que

$$\begin{aligned} (A, B) \models \phi &\iff \gamma(A \models \psi_X^1, \dots, A \models \psi_X^m, \\ &B \models \psi_Y^1, \dots, B \models \psi_Y^m) = 1 \end{aligned}$$

En mettant  $\gamma$  sous forme normale disjonctive et en notant  $J_i^X$  l'ensemble des indices concernant  $X$  apparaissant positivement dans la  $i$ -ème conjonction, et  $J_i^Y$  l'ensemble des indices concernant  $Y$  apparaissant positivement dans la  $i$ -ème conjonction on peut écrire :

$$\begin{aligned} (A, B) \in \llbracket \phi \rrbracket &\iff \bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{j \in J_i^X} (A \models \psi_X^j) \\ &\quad \wedge \bigwedge_{j \notin J_i^X} (A \models \neg \psi_X^j) \\ &\quad \wedge \bigwedge_{j \in J_i^Y} (B \models \neg \psi_Y^j) \\ &\quad \wedge \bigwedge_{j \notin J_i^Y} (B \models \psi_Y^j) \end{aligned}$$

On décrit ci-dessous deux opérations liées à cette dé-

composition :

$$\begin{array}{lcl} X & \rightarrow & \{0, 1\}^m \\ \text{Tp} : A & \mapsto & (A \models \psi_X^1, \dots, A \models \psi_X^m) \\ \mathcal{P}(X) & \rightarrow & \mathcal{P}(X) \\ \vec{\square} : S & \mapsto & \text{Tp}^{-1}(\text{Tp}(S)) \end{array}$$

L'opérateur de saturation  $\vec{\square}$  est bien un opérateur de clôture sur  $X$ . On définit de la même manière ces deux opérations sur  $Y$ , et comme il n'y a pas d'ambiguïté sur l'utilisation de ces deux opérations on les note de manière identique. Ces opérations vérifient deux propriétés cruciales que l'on liste ci-après

- (1) Si  $U \times V \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$  alors  $\uparrow U \times \uparrow V \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$
- (2) Si  $U \times V \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$  alors  $\vec{U} \times \vec{V} \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$

La première propriété provient directement du fait que  $\llbracket \phi \rrbracket$  est clos par le haut. La seconde du fait que l'appartenance à  $\llbracket \phi \rrbracket$  est uniquement déterminée par les paires de types. Plus précisément, si  $(x, y) \in \vec{U} \times \vec{V}$ , alors il existe  $(x', y') \in U \times V \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$  avec le même type. Seulement,  $\phi$  est caractérisée par les types, donc  $(x, y) \models \phi$ .

À partir de ces deux opérateurs de clôture, on va produire une sorte de variante d'un théorème de Ward [Ward, 1942] pour les combiner. En considérant un système de ré-écriture sur les paires  $(U, V)$  telles que  $U \times V \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$  qui consiste à appliquer les deux opérations de saturation, alors on a les propriétés suivantes :

- (a) On peut toujours appliquer les deux opérations de saturation sur une paire  $(U, V)$ .
- (b) Les opérations de saturation sont croissantes pour l'inclusion.
- (c) Dans une réduction, on peut toujours supposer avoir une alternance parfaite entre les opérateurs car ils sont idempotents.
- (d) Dans une réduction,  $(\text{Tp}(U), \text{Tp}(V)) \subseteq \{0, 1\}^{2m}$  est une suite croissante dans un ensemble fini.
- (e) Ainsi, en un temps fini, on arrive à une paire  $U \times V \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$  qui est ouverte et saturée.
- (f) En particulier, il n'y a qu'un nombre fini de formes "normales" possibles correspondant aux sous ensembles de  $\{0, 1\}^{2m}$ .
- (g) On marque  $\rho(x, y)$  pour  $(x, y) \models \phi$  la paire  $U, V$  obtenue dans le système de ré-écriture à partir de la paire  $\{x\} \times \{y\}$ .

Désormais, on cherche à montrer que  $\llbracket \phi \rrbracket$  est compact.

Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} \llbracket \phi \rrbracket &= \bigcup_{(x,y) \in \llbracket \phi \rrbracket} \{x\} \times \{y\} = \bigcup_{(x,y) \in \llbracket \phi \rrbracket} \rho(x, y) \\ &= \bigcup_{i=1}^k U_i \times V_i \end{aligned}$$

Avec  $U_i \times V_i$  produit d'ouverts,  $U_i = \vec{U}_i$  et  $V_i = \vec{V}_i$ . Or, un ensemble saturé dans  $X$  (resp. dans  $Y$ ) est clairement définissable dans  $X$  (resp.  $Y$ ) avec une disjonction finie.

Ainsi, par hypothèse sur  $X$  et  $Y$  on sait que  $U_i$  et  $V_i$  sont compacts de  $X$  et  $Y$ . En utilisant le théorème de Tychonoff les produits  $U_i \times V_i$  sont compacts. Une union finie de compacts étant compacte, on déduit bien que  $\llbracket \phi \rrbracket$  est compact.  $\square$

**Remarque.** — On peut construire comme ceci des classes de structures complexes qui échappent aux théorèmes généraux connus. Par exemple les paires de graphes de degrés bornés, qui forme une structure qui n'est pas de degré borné, et qui n'est pas non plus wqo. Cela provient du prédicat  $<$  qui ordonne la paire.

### 5.3 Un produit alternatif

Une construction courante lors de l'étude des structures relationnelles finies est le produit direct de structures. Lorsqu'on considère deux classes de structures, il est possible de considérer la classe des produits, tout comme la classe des unions disjointes, déjà considérée dans la section précédente.

**Définition 41 (Produit point à point).** — Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont des ensembles de structures, on considère  $\mathcal{C} \cdot \mathcal{D} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}\}$ .

On pose comme topologie celle engendrée par les ensembles de la forme  $\{A \times B \mid A \in U \wedge B \in V\}$  pour  $U, V$  ouverts respectivement de  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{D}$ .

★ **Théorème 42 (Stabilité par produit point à point).** — Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont logiquement pré-spectraux sur une topologie d'Alexandroff alors  $\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}$  est logiquement pré-spectral.

# 6 | Produit en couronne

Dans la partie précédente, on a montré que les espaces logiquement pré-spectraux sont clos par produit. La preuve de ce résultat se décompose en deux parties (a) décomposer les formules (b) se ramener par saturation à un ensemble simple. Si l'ensemble *simple* était fini dans le cas du produit, on constate que la preuve s'adapte parfaitement au cas où il est wqo. Afin d'illustrer cette généralisation, on démontre d'abord une propriété de stabilité par mots finis.

Les mots finis sont l'étape naturelle car c'est le célèbre Lemme de Higman [Higman, 1952] qui lui correspond dans la théorie des wqo, et que la preuve est juste assez complexe pour illustrer les adaptations qu'il faudrait faire pour obtenir des résultats pour des structures plus générales, comme les arbres étiquetés, des graphes particuliers et autres.

## 6.1 Mots finis

L'espace des mots finis est une construction naturelle dans le cadre des espaces pré-ordonnés qui peut sembler moins utile pour les espaces logiquement pré-spectraux. Néanmoins, ces constructions permettent de représenter des classes de structures complexes en les décomposant, notamment en isolant un *préordre total* dans ces structures.

**Définition 43 (Espace des mots).** — Si  $\mathcal{C}$  est une classe de structures sur le langage  $\sigma$  on pose  $\sigma' = \sigma \uplus \{<\}$ , et on pose

$$\mathcal{C}^* \triangleq \{A_1 \uplus_{<} A_2 \uplus_{<} \cdots \uplus_{<} A_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \wedge \forall 1 \leq i \leq n, A_i \in \mathcal{C}\}$$

Dans la construction, le symbole  $<$  est une relation binaire transitive qui ordonne totalement les structures  $A_1, \dots, A_n$ , et n'est pas définie pour des paires dans une même structure. Pour simplifier les notations, on utilisera simplement  $A_1 \cdots A_n$  pour écrire  $A_1 \uplus_{<} \cdots \uplus_{<} A_n$ . Il est clair que cela représente bien des mots finis sur  $\mathcal{C}$ .

La logique sur l'espace des mots permet de parler de structures qui sont denses dans un certain sens, puisqu'elles contiennent un ordre total. On peut interpréter les formules sur les mots comme des formules de logique temporelle comparant des instants où des propriétés sont vraies (sur des mots finis). Cela motive la définition de la topologie sur cet espace de mots, qui correspond par ailleurs à l'ordre de Higman [Goubault-Larrecq, 2010]. L'idée est qu'un ouvert

de base précise l'existence de positions vérifiant des propriétés ouvertes dans un ordre particulier. C'est ce que capture la notion d'ensemble basique.

**Définition 44 (Ensembles basiques).** — Si  $S_1, \dots, S_n$  sont des sous ensembles de  $X$  alors on note

$$[S_1, \dots, S_n] = X^* S_1 X^* \cdots X^* S_n X^* \quad (6.1)$$

**Définition 45 (Topologie sur les mots).** — Si  $(X, \tau)$  est un espace topologique, on pose  $(X^*, \tau^*)$  où  $X^*$  est l'ensemble des mots finis et  $\tau^*$  est la topologie engendrée par  $[U_1, \dots, U_p]$  pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $U_i \in \tau$ .

Comme dans le cas du produit cartésien, le théorème de stabilité utilise un théorème de décomposition des formules. Cette fois, il y a une subtilité car la taille des mots est variable, on doit donc adapter le théorème en conséquence. La preuve de ce résultat suit exactement le schéma classique et est donc omise.

**\* Théorème 46 (Feferman-Vaught pour les mots finis).** — Si  $\phi$  est une formule sur  $X^*$  avec variables libres  $(x_1, \dots, x_n)$  alors il existe des formules  $(\psi_1, \dots, \psi_m)$  sur  $\sigma_X \uplus \{\varepsilon\}$  et une famille de fonctions booléennes  $\rho_k : \{0, 1\}^{mk} \rightarrow \{0, 1\}$  telles que

$$\begin{aligned} \forall w, (a_1, \dots, a_n) \\ w \models \phi(a_1, \dots, a_n) \\ \iff \\ \rho_{|w|}((w_i \models \psi_k(a_1, \dots, a_n))_{i,k}) = 1 \end{aligned}$$

À l'aide de ce théorème de décomposition, on retrouve une notion de saturation qui permettra de se ramener à étudier l'espace plus simple des ouverts saturés. Comme dans le cas de l'espace produit, il est aisé de vérifier qu'il n'existe qu'un nombre fini d'ensembles saturés dans  $X$ .

**\* Définition 47 (Saturation).** — Si  $\psi_1, \dots, \psi_m$  sont des formules sur  $X$  alors on définit l'opérateur de saturation et l'opérateur de type

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \{0, 1\}^m \\ \text{Tp} : A &\mapsto (A \models \psi_1, \dots, A \models \psi_m) \\ \mathcal{P}(X) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ \vec{\square} : S &\mapsto \text{Tp}^{-1}(\text{Tp}(S)) \end{aligned}$$

**\* Propriété 48 (Opérateur de clôture).** — L'opération  $\vec{\square}$  est un opérateur de clôture sur  $X$  qui possède un nombre fini de points fixes.

En utilisant cet opérateur de saturation sur  $X$ , on construit naturellement un opérateur de saturation pour les ensembles basiques, en saturant chaque composante. Attention, cette fois il y a un nombre infini d'ensembles basiques saturés, car la taille (nombre de lettres fixées) n'est pas bornée !

★ **Définition 49 (Saturation pour les ensembles basiques).** — Soit  $[S_1, \dots, S_n]$  un ensemble basique de  $X^*$ , on définit

$$\overrightarrow{[S_1, \dots, S_n]} = [\overrightarrow{S_1}, \dots, \overrightarrow{S_n}] \quad (6.2)$$

Même si ce nouvel ensemble n'est pas fini, il possède une propriété de wqo et cela nous permet de conclure de manière similaire au produit cartésien.

★ **Lemme 50 (Well Quasi Ordering pour les ensembles basiques saturés).** — On pose  $\mathcal{S}$  l'ensemble des ensembles basiques saturés de  $X^*$  muni de l'ordre d'inclusion inverse. Cet ensemble est un beau préordre.

★ **Théorème 51 (Simplification de formules).** — Soit  $\phi$  une formule close monotone pour  $\leq^*$  sur  $X^*$ . Alors  $\llbracket \phi \rrbracket$  est compact.

★ **Théorème 52 (Stabilité par mots finis).** — Si  $(X, \leq)$  est logiquement pré-spectral alors  $(X^*, \leq^*)$  est logiquement pré-spectral.

L'exemple détaillé des mots finis permet d'expliquer un schéma général de preuve. En effet, le point clef est le Lemme 50, qui décrit comment la structure sous-jacente aux mots finis<sup>1</sup>, coloriée par un nombre fini d'étiquettes<sup>2</sup> possède une propriété de wqo. On retrouve donc la notion de  $k$ -wqo.

## 6.2 Un produit en couronne général

La section précédente pousse à étudier un schéma plus général, le produit en couronne, qui permet de représenter des structures possédant plusieurs niveaux. Un exemple simple est celui d'un réseau d'entreprises et d'employés dans ces entreprises possédant eux-mêmes des relations, comme illustré dans la Figure 6.1.

**Définition 53 (Produit en couronne).** — Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux classes de structures. On pose  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  comme l'ensemble des structures de  $\mathcal{C}$  dont les sommets sont étiquetés par des structures de  $\mathcal{D}$ .

Un élément de  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  est un ensemble  $u$  de paires  $(a, b)$  telles que :

1. Un ordre linéaire fini, que l'on notera  $\text{LinOrder}$ .
2. Ici les étiquettes sont des ensembles saturés.

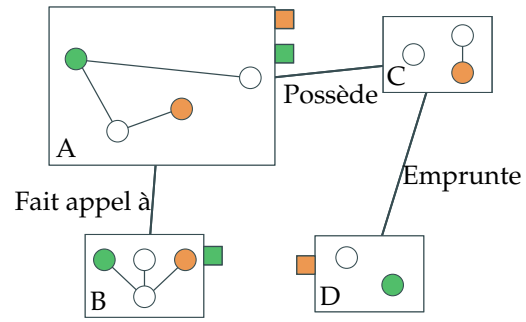


FIGURE 6.1 – Une structure hiérarchique.

- (1) La projection sur la première composante forme bien une structure de  $\mathcal{C}$  :  $\pi_1(u) \in \mathcal{C}$ .
- (2) Les projections partielles sur la deuxième composante forment bien des structures de  $\mathcal{D}$  :  $\forall a \in \pi_1(u), \{b \mid (a, b) \in u\} \in \mathcal{D}$ .
- (3) Il n'y a pas de ré-utilisation d'éléments sur la seconde composante :  $\forall a \neq a' \in \pi_1(u), (a, b) \in u \wedge (a', b') \in u \implies b \neq b'$ .

Une manière plus algébrique de l'écrire serait la suivante :

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} = \sum_{A \in \mathcal{C}} \prod_{a \in A} \mathcal{D} \quad (6.3)$$

**Exemple.** — L'ensemble des mots finis non vides sur  $\mathcal{D}$  est obtenu comme le produit en couronne  $\text{LinOrder} \times \mathcal{D}$ . De plus  $\text{LinOrder}$  est wqo par sous-structure induite quand on lui ajoute un nombre fini d'étiquettes.

**Exemple.** — L'ensemble produit  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  peut s'écrire  $\text{TwoOrderedPoints} \times \mathcal{C}$ . De plus  $\text{TwoOrderedPoints}$  est wqo quand lui ajoute un nombre fini d'étiquettes.

Une question reste en suspens : quelle notion d'ordre poser sur un produit en couronne ? La réponse pour le produit et l'espace des mots a été de vérifier dans un premier temps que les structures sous-jacentes sont compatibles, puis de comparer les structures utilisées pour colorier. On prendra comme notation simplificatrice  $u_a$  pour noter l'ensemble des  $b$  tels que  $(a, b) \in u$ , et ainsi représenter la seconde projection.

**Définition 54 (Ordre sur le produit en couronne).** — Si  $U$  et  $V$  sont des structures dans  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  avec un ordre  $\leq_U$  et  $\leq_V$  tel que  $A \leq_U B$  fournit une fonction  $h : A \rightarrow B$  alors

on pose

$$U \leq V \iff \pi_1(U) \leq_C \pi_1(V) \wedge \forall a \in \pi_1(U), U_a \leq_D V_{h(a)}$$

On peut se demander si cette construction abstraite correspond bien aux ordres qui nous intéressent habituellement (sous-structure, sous-structure induite, homomorphisme).

★ **Propriété 55 (Stabilité).** — Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont ordonnées par une relation structurelle (sous-structure, sous-structure induite, homomorphisme) alors il en va de même pour  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ .

### 6.2.1 Un premier résultat de stabilité

Cette première preuve de stabilité est une adaptation immédiate de la construction faite sur les mots finis. On donne ici l'énoncé du théorème de décomposition associé.

★ **Théorème 56 (À la Feferman-Vaught).** — Pour toute formule  $\phi$  sur  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  avec  $r$  variables libres il existe des formules  $\psi_1, \dots, \psi_n$  sur  $\mathcal{D}$  et une famille de fonctions  $(\rho_A)_{A \in \mathcal{C}}$  de signatures  $(\{1, \dots, r\} \rightarrow A) \times (A \rightarrow \{0, 1\}^n) \rightarrow \{0, 1\}$  telles que

$$\begin{aligned} \forall U \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}, \forall (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in U, \\ U \models \phi((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) \iff \\ \rho_{\pi_1(U)}(i \mapsto a_i; a \mapsto (U_a \models \psi_i(b_1, \dots, b_n))_{i,a}) = 1 \end{aligned}$$

Dans le cas des mots finis, la propriété de wqo s'obtient quelque soit l'alphabet  $\Sigma$  utilisé, pourvu qu'il soit fini. Afin de mimer la preuve on demande donc que  $\mathcal{C}$  soit  $k$ -wqo, et ce pour tout  $k$  fini.

★ **Théorème 57 (Stabilité par produit en couronne).** — Soit  $(\mathcal{C}, \leq_C, \sigma_C)$  un ensemble de structures qui est  $k$ -wqo pour tout  $k$ . Soit  $(\mathcal{D}, \leq_D, \sigma_D)$  un ensemble de structures logiquement pré-spectral. Alors  $(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \leq_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}, \sigma_C \uplus \sigma_D)$  est logiquement pré-spectral.

**Remarque.** — Quelques remarques sur le résultat

- (1) L'hypothèse  $k$ -wqo pour  $k \geq 2$  est nécessaire, par exemple en posant  $\mathcal{C}$  comme l'ensemble des chemins, et  $\mathcal{D}$  comme un ensemble à deux éléments.
- (2) Une conjecture de Pouzet<sup>3</sup> impliquerait qu'il suffit de demander 2-wqo.

3.  $k$ -wqo  $\iff$  2-wqo [Pouzet, 1972].

**Exemple.** — L'ensemble  $T(\mathcal{C})$  des arbres coloriés par des éléments de  $\mathcal{C}$  est logiquement pré-spectral dès lors que  $\mathcal{C}$  est logiquement pré-spectral.

On peut imaginer utiliser d'autres ordres comme l'ordre mineur, ou l'ordre d'immersion sur les graphes [Lovász, 2006], pour construire des espaces logiquement pré-spectraux dont l'ordre n'est pas  $\subseteq_i, \subseteq$  ou  $\rightarrow$ .

### 6.2.2 Un second résultat de stabilité

Le résultat précédent n'est pas toujours satisfaisant, car il fait intervenir la notion de  $k$ -wqo. On peut retirer cette hypothèse en équilibrant la charge de preuve entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ , en effet, l'hypothèse la plus forte était sur  $\mathcal{C}$ . Cette nouvelle approche se base sur la construction du produit en couronne, car sa définition même rappelle celle du produit point à point. On explicite leur lien ci-dessous.

★ **Définition 58 (Lien avec le produit).** — Supposons que  $\mathcal{D}$  est close par union disjointe de structures. On construit une fonction  $\text{pext} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \cdot \mathcal{D}$  comme suit :

$$\text{pext}(u) \triangleq \{(a, b) \mid \exists a', \exists b', (a', b) \in u \wedge (a, b') \in u\} \quad (6.4)$$

★ **Propriété 59 (Lien avec le produit).** — Si  $\text{pext}$  est bien définie, alors  $u \subseteq \text{pext}(u)$ .

On rappelle que les espaces  $k$ -logiquement pré-spectraux ont été définis page 13.

★ **Théorème 60 (Stabilité par produit en couronne).** — Si  $\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}$  est 2-logiquement pré-spectral et que  $\mathcal{D}$  est close par union disjointe de structures et par sous-structure alors  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  est logiquement pré-spectral.

# 7 | Conclusion

## 7.1 Récapitulatifs

L'objectif principal de ce rapport de stage est l'étude des théorèmes de préservation au premier ordre sur des classes de structures finies. Afin de mieux étudier ces théorèmes on se ramène à l'étude d'ordres sur ces structures, tout d'abord via les wqo puis en introduisant les espaces logiquement pré-spectraux.

Ces espaces ont des propriétés de stabilité que l'on résume Figure 7.1 qui permettent de mieux comprendre l'existence des théorèmes de préservation et construire des classes complexes *à partir d'autres*, et non pas en utilisant un argument combinatoire spécifique à cette classe.

|              |                                 |
|--------------|---------------------------------|
| $X := Y$     | si $Y$ wqo                      |
| $X \times X$ |                                 |
| $X \uplus X$ |                                 |
| $X \cdot X$  |                                 |
| $X^*$        |                                 |
| $T(X)$       |                                 |
| $Y \times X$ | si $Y$ $k$ -wqo                 |
| $Y \times Z$ | si $Y \cdot Z$ 2-lps            |
|              | et $Z$ clos par sous-structure  |
|              | et $Z$ clos par union disjointe |

FIGURE 7.1 – Résumé des résultats de stabilité

En utilisant ces constructeurs, il est possible de construire des espaces logiquement pré-spectraux qui n'entrent pas dans le cadre des théorèmes connus. Par exemple, le résultat pour  $\subseteq_i$  pour les structures de degré borné [Atserias et al., 2008], ne s'applique plus dès lors qu'on considère des mots. En effet, ceux-ci contiennent un ordre total via le prédicat ( $<$ ) qui est ajouté dans la construction.

## 7.2 Limites

Néanmoins, l'étude effectuée possède de nombreuses limitations inhérentes à l'approche utilisée. Tout d'abord, ces théorèmes se limitent à FO, et les résultats reposent explicitement sur des théorèmes de décomposition, qui ne s'adaptent pas toujours à des logiques plus puissantes [Makowsky, 2004] et implicitement sur des résultats de localité qui ne sont clairement plus valides pour des logiques comme MSO. À l'in-

verse, des sous-fragments de FO ne sont pas bien compris. Ainsi, l'existence d'un théorème de préservation pour le fragment  $\exists\forall\exists$  [Rosen, 1995] n'entre pas dans la description via des espaces logiquement pré-spectraux. Par ailleurs, l'approche par espaces logiquement pré-spectraux ne permet pas de comprendre la validité du HPT dans le cas des structures finies, dont la preuve repose sur des propriétés de saturation, à l'opposé des classes étudiées dans le rapport qui sont au contraire *peu denses*.

Enfin, si l'étude des théorèmes de préservation est intéressante en soi, la définition des espaces logiquement pré-spectraux ne capture que ceux-ci, et ne caractérise pas l'existence d'algorithmes efficaces pour répondre à certaines requêtes lorsqu'on contraint la classe de structures a priori [Kreutzer, 2008, Kreutzer and Dawar, 2009].

## 7.3 Ouvertures

Les travaux de Dietrich Kuske et Nicole Schweikardt [Kuske and Schweikardt, 2018] sur des logiques plus puissantes que FO, possédant encore des théorèmes de localité, semblent prometteurs pour généraliser la notion d'espace logiquement pré-spectral. Ces logiques sont des variantes de FO dans lesquelles des opérateurs de comptage sont ajoutés, ces opérations étant particulièrement utiles dans des requêtes de bases de données.

Jusqu'à présent, la notion même d'espace logiquement pré-spectral est construite pour abstraire les preuves reposant sur la finitude du nombre de modèles minimaux. La preuve du HPT dans le cas fini échappe à cette description [Rossman, 2008] mais peut toutefois être expliquée topologiquement [Nešetřil and de Mendez, 2012, Chapitre 10] à l'aide de la dualité de Stone.

Un objectif à plus long terme serait d'adapter la définition d'espace logiquement pré-spectral afin de caractériser des classes possédant des meta-théorèmes algorithmiques permettant d'avoir des algorithmes de *model checking* ou *query enumeration* solubles à paramètre fixé.

# Bibliographie

- [Abiteboul et al., 1995] Abiteboul, S., Hull, R., and Vianu, V. (1995). *Foundations of databases : the logical level*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.
- [Ajtai and Gurevich, 1994] Ajtai, M. and Gurevich, Y. (1994). Datalog vs first-order logic.
- [Atserias et al., 2008] Atserias, A., Dawar, A., and Grohe, M. (2008). Preservation under extensions on well-behaved finite structures. *SIAM Journal on Computing*, 38(4) :1364–1381.
- [Atserias et al., 2006] Atserias, A., Dawar, A., and Kolaitis, P. G. (2006). On preservation under homomorphisms and unions of conjunctive queries. *Journal of the ACM (JACM)*, 53(2) :208–237.
- [Chang and Keisler, 1990] Chang, C. C. and Keisler, H. J. (1990). *Model theory*, volume 73. Elsevier.
- [Codd, 1970] Codd, E. F. (1970). A relational model of data for large shared data banks. *Communications of the ACM*, 13(6) :377–387.
- [Daligault et al., 2010] Daligault, J., Rao, M., and Thomassé, S. (2010). Well-quasi-order of relabel functions. *Order*, 27(3) :301–315.
- [Dawar et al., 2007] Dawar, A., Grohe, M., Kreutzer, S., and Schweikardt, N. (2007). Model theory makes formulas large. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 913–924. Springer.
- [Deutsch et al., 2008] Deutsch, A., Nash, A., and Remmel, J. B. (2008). The chase revisited. In *Proceedings of the Twenty-Seventh ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART Symposium on Principles of Database Systems, PODS 2008, June 9-11, 2008, Vancouver, BC, Canada*, pages 149–158.
- [Dickmann et al., 2019] Dickmann, M., Schwartz, N., and Tressl, M. (March 2019). *Spectral Spaces*. New Mathematical Monographs (35). Cambridge University Press.
- [Ding, 1992] Ding, G. (1992). Subgraphs and well-quasi-ordering. *Journal of Graph Theory*, 16 :489–502.
- [Drange et al., 2014] Drange, P. G., Dregi, M. S., Fomin, F. V., Kreutzer, S., Lokshtanov, D., Pilipczuk, M., Pilipczuk, M., Reidl, F., Saurabh, S., Villaamil, F. S., et al. (2014). Kernelization and sparseness : the case of dominating set. *arXiv preprint arXiv :1411.4575*.
- [Ebbinghaus and Flum, 1995] Ebbinghaus, H.-D. and Flum, J. (1995). *Finite model theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer.
- [Gaifman, 1982] Gaifman, H. (1982). On local and non-local properties. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 107, pages 105–135. Elsevier.
- [Ganian et al., 2017] Ganian, R., Hliněný, P., Nešetřil, J., Obdržálek, J., and de Mendez, P. O. (2017). Shrub-depth : Capturing height of dense graphs. *CoRR*, abs/1707.00359.
- [Gheerbrant et al., 2014] Gheerbrant, A., Libkin, L., and Sirangelo, C. (2014). Naïve evaluation of queries over incomplete databases. *ACM Trans. Database Syst.*, 39(4) :31 :1–31 :42.
- [Goubault-Larrecq, 2010] Goubault-Larrecq, J. (2010). Noetherian spaces in verification. In *Automata, Languages and Programming, 37th International Colloquium, ICALP 2010, Bordeaux, France, July 6-10, 2010, Proceedings, Part II*, pages 2–21.
- [Goubault-Larrecq et al., 2016] Goubault-Larrecq, J., Seisenberger, M., Selivanov, V. L., and Weiermann, A. (2016). Well quasi-orders in computer science (dagstuhl seminar 16031). *Dagstuhl Reports*, 6(1) :69–98.
- [Grädel et al., 2007] Grädel, E., Kolaitis, P. G., Libkin, L., Marx, M., Spencer, J., Vardi, M. Y., Venema, Y., and Weinstein, S. (2007). *Finite Model Theory and its applications*. Springer Science & Business Media.
- [Grohe et al., 2017] Grohe, M., Kreutzer, S., and Siebertz, S. (2017). Deciding first-order properties of nowhere dense graphs. *Journal of the ACM (JACM)*, 64(3) :17.
- [Harwath et al., 2014] Harwath, F., Heimberg, L., and Schweikardt, N. (2014). Preservation and decomposition theorems for bounded degree structures. In *Proceedings of the Joint Meeting of the Twenty-Third EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL) and the Twenty-Ninth Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, page 49. ACM.
- [Higman, 1952] Higman, G. (1952). Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1) :326–336.
- [Kreutzer, 2008] Kreutzer, S. (2008). Algorithmic meta-theorems. In *International Workshop on Parameterized and Exact Computation*, pages 10–12. Springer.
- [Kreutzer and Dawar, 2009] Kreutzer, S. and Dawar, A. (2009). Parameterized complexity of first-order logic. *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)*, 16 :131.



- [Kruskal, 1972] Kruskal, J. B. (1972). The theory of well-quasi-ordering : A frequently discovered concept. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 13(3) :297–305.
- [Kuske and Schweikardt, 2018] Kuske, D. and Schweikardt, N. (2018). Gaifman Normal Forms for Counting Extensions of First-Order Logic. In Chatzigiannakis, I., Kaklamanis, C., Marx, D., and Sannella, D., editors, *45th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2018)*, volume 107 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 133 :1–133 :14, Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.
- [Libkin, 2012] Libkin, L. (2012). Elements of finite model theory.
- [Lovász, 2006] Lovász, L. (2006). Graph minor theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43(1) :75–86.
- [Makowsky, 2004] Makowsky, J. A. (2004). Algorithmic uses of the feferman–vaught theorem. *Annals of Pure and Applied Logic*, 126(1-3) :159–213.
- [Nešetřil and de Mendez, 2012] Nešetřil, J. and de Mendez, P. O. (2012). *Sparsity : Graphs, Structures, and Algorithms*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- [Nešetřil and Ossona de Mendez, 2010] Nešetřil, J. and Ossona de Mendez, P. (2010). First order properties on nowhere dense structures. *The Journal of Symbolic Logic*, 75(3) :868–887.
- [Pouzet, 1972] Pouzet, M. (1972). Un bel ordre d’abritement et ses rapports avec les bornes d’une multirelation. *CR Acad. Sci. Paris Sér. AB*, 274 :A1677–A1680.
- [Rosen, 1995] Rosen, E. (1995). Finite model theory and finite variable logics.
- [Rossman, 2008] Rossman, B. (2008). Homomorphism preservation theorems. *J. ACM*, 55(3) :15 :1–15 :53.
- [Stolboushkin, 1995] Stolboushkin, A. P. (1995). Finitely monotone properties. In *Proceedings of Tenth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 324–330. IEEE.
- [Tait, 1959] Tait, W. W. (1959). A counterexample to a conjecture of scott and suppes. *The journal of symbolic logic*, 24(1) :15–16.
- [Ward, 1942] Ward, M. (1942). The closure operators of a lattice. *Annals of Mathematics*, 43(2) :191–196.

# A | Une preuve de Feferman-Vaught

Dans cette partie, on démontre formellement un des résultats de décomposition énoncés dans le rapport, pour rester cohérent, on développe le cas de l'union disjointe de deux structures, qui est utilisé pour démontrer la stabilité par produit, cas qui est développé dans le rapport.

**Théorème 61 (Feferman-Vaught pour l'union disjointe de structures).** — Soit  $\phi$  une formule sur  $\sigma_X \uplus \sigma_Y$ , alors il existe  $\gamma : 0, 1^{2^m} \rightarrow 0, 1$  et  $\psi_X^i, \psi_Y^i$  des formules sur  $X$  et  $Y$  telles que pour tout  $A, B$  structures  $(A, B) \models \phi$  si et seulement si  $\gamma(A \models \psi_X^i; A \models \psi_Y^i) = 1$

*Démonstration.* La preuve s'inspire de celle fournie dans l'article de Makowsky sur les applications algorithmiques du théorème de Feferman-Vaught [Makowsky, 2004].

On procède par induction sur la formule  $\phi$ , en montrant que pour toute paire  $(A, B)$ , pour toute valuation  $u_1, \dots, u_n$  des variables libres de  $\phi$  dans  $(A, B)$  on a bien :

$$\begin{aligned} (A, B) \models \phi(u_1, \dots, u_n) \\ \iff \\ \gamma(A \models \psi_X^i(u_1, \dots, u_n); B \models \psi_Y^i(u_1, \dots, u_n)) = 1 \end{aligned}$$

Afin de prendre en compte le fait que  $u_i \in A \cup B$ , on ajoute une sémantique de monde ouvert aux signature  $\sigma_X$  et  $\sigma_Y$  comme suit

- (1) Quand un élément d'un  $n$ -uplet n'est pas dans la structure  $A$  la relation  $R(a_1, \dots, a_n)$  n'est pas vérifiée
- (2) On ajoute le symbole  $\varepsilon(x)$  qui vérifie  $M \models \varepsilon(a)$  si et seulement si  $a \in M$  quelque soit le modèle  $M$ .

**Si la formule est atomique** Sans restriction de généralité on a  $\phi = R_X(x_1, \dots, x_n)$ .

$$\begin{aligned} \psi_X &\triangleq R_X(x_1, \dots, x_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^n \varepsilon(x_i) \\ \psi_Y &\triangleq \bigwedge_{i=1}^n \neg \varepsilon(x_i) \end{aligned}$$

Enfin, en posant  $\gamma(a, b) \triangleq a \wedge b$  on obtient bien la caractérisation désirée en utilisant notre sémantique "monde ouvert".

**Si la formule est une conjonction** On écrit  $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$  et par hypothèse de récurrence on a une caractérisation de  $\phi_1$  et une caractérisation de  $\phi_2$ .

On pose alors  $\gamma(b_1, \dots, b_{2m}, b_{2m+1}, \dots, b_{4m}) \triangleq \gamma_1(b_1, \dots, b_{2m}) \wedge \gamma_2(b_{2m+1}, \dots, b_{4m})$ , et concatène les listes de formules de chaque caractérisation.

**Si la formule est une négation** On écrit  $\neg\phi$  la formule à caractériser. On a par hypothèse d'induction un  $\gamma$  et des formules  $\psi_X^i$  et  $\psi_Y^i$  telles que pour tout  $(A, B)$  et tout  $u_1, \dots, u_n$  valuation de  $\phi$  dans  $(A, B)$

$$\begin{aligned} (A, B) \models \phi(u_1, \dots, u_n) \\ \iff \\ \gamma((A \models \psi_X^i(u_1, \dots, u_n))_i; (B \models \psi_Y^i(u_1, \dots, u_n))_i) = 1 \end{aligned}$$

En gardant les mêmes formules et en posant  $\gamma' \triangleq \neg\gamma$  on obtient une caractérisation de  $\neg\phi$ .

**Si la formule est existentielle** Alors considérons  $(\gamma; \psi_X^i; \psi_Y^i)$  une caractérisation de  $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$ . On peut écrire  $\gamma$  sous forme normale disjonctive

$$\gamma(b_1, \dots, b_{2m}) = \bigvee_{i=1}^k C_i$$

Où  $C_i \triangleq C_X^i \wedge C_Y^i$  avec  $C_X^i$  qui est une conjonction ne comprenant que des formules portant sur  $X$  et  $C_Y^i$  qui est une conjonction ne comprenant que des formules portant sur  $Y$ .

On utilise un abus de notation qui consiste à considérer  $C_X^i$  et  $C_Y^i$  sont des formules sur  $X$  et  $Y$ .

Par ailleurs, on construit deux opérateurs pour supprimer les  $\varepsilon(x)$  quand on a une information sur la provenance du  $X$  en question :

$$\begin{aligned} [\varepsilon(x)]_{\varepsilon(x)=0} &= \perp \\ [R_X(x_1, \dots, x, \dots, x_n)]_{\varepsilon(x)=0} &= \perp \\ [\exists y. \phi]_{\varepsilon(x)=0} &= \exists y. [\phi]_{\varepsilon(x)=0} \\ &\quad \text{si } x \neq y \\ [\exists y. \phi]_{\varepsilon(x)=0} &= \exists y. \phi \\ &\quad \text{si } x = y \\ [\phi_1 \wedge \phi_2]_{\varepsilon(x)=0} &= [\phi_1]_{\varepsilon(x)=0} \wedge [\phi_2]_{\varepsilon(x)=0} \\ [\neg\phi]_{\varepsilon(x)=0} &= \neg[\phi]_{\varepsilon(x)=0} \end{aligned}$$

De la même manière, on construit l'opérateur  $[\square]_{\varepsilon(x)=1}$  qui constate que  $x$  est bien dans la structure.

La propriété fondamentale est la suivante  $A \models \forall x. [\psi]_{\varepsilon(x)=1} \iff \psi(x)$ .

On pose alors pour chaque clause deux formules

$$\theta_i^1 \triangleq \exists x. [C_X^i]_{\varepsilon(x)=1} \quad (\text{A.1})$$

$$\theta_i^2 \triangleq [C_X^i]_{\varepsilon(x)=0} \quad (\text{A.2})$$

De la même manière, on construit  $\tau_i^1$  et  $\tau_i^2$ .

On pose alors (encore une fois avec un léger abus de notation).

$$\gamma'(\theta_i^1, \theta_i^2, \tau_i^1, \tau_i^2) \triangleq \bigvee_{i=1}^k (\theta_i^1 \wedge \tau_i^2) \vee (\theta_i^2 \wedge \tau_i^1)$$

- S'il existe  $a$  tel que  $(A, B) \models \phi(a, u_1, \dots, u_n)$ .  
Sans restriction de généralité supposons  $a \in A$ , on a alors un  $i$  tel que

$$A \models C_X^i(a, u_1, \dots, u_n) B \models C_Y^i(a, u_1, \dots, u_n)$$

Mais alors par construction  $A \models \theta_i^1$  puis  $B \models \tau_i^2$

Donc on a bien  $\gamma'(\dots) = 1$ .

- Réciproquement, supposons que  $\gamma'(\dots) = 1$ .  
Alors sans restriction de généralité il existe un  $i$  tel que  $\theta_i^1$  et  $\tau_i^2$  sont validées simultanément. Alors il existe un  $a \in A$  tel que  $C_X^i$  soit validée. Mais par construction, cela veut dire que  $(A, B) \models C_Y^i(a, u_1, \dots, u_n)$  et  $(A, B) \models C_X^i(a, u_1, \dots, u_n)$ . Ce qui montre que  $(A, B) \models \phi(a)$  donc  $(A, B) \models \exists x. \phi$ .

□

# B | Graphes peu denses sans préservation

Dans cette section on considère  $\mathcal{C}$  la classe des graphes planaires munis de l'ordre sous-structure  $\subseteq$  (monomorphisme) et on démontre que cette classe ne possède pas de théorème de préservation. Ce résultat est important car il permet de répondre négativement à la question : est-ce qu'une classe suffisamment peu dense possède un théorème de préservation ? En effet, la classe que l'on va considérer sera non seulement peu dense, car définie par l'exclusion de deux mineurs, mais de clique-width bornée par 4. Ainsi, les classifications naturelles pour l'étude de l'ordre homomorphisme ne semblent pas pertinentes pour l'ordre  $\subseteq$  ou l'ordre  $\subseteq_i$ .

On notera  $\subseteq_i$  l'ordre sous-structure induite et on considérera  $\mathcal{C}(B)$  l'ensemble des graphes planaires avec une couleur « Blanc » et les ordres  $\subseteq$ ,  $\subseteq_i$  adaptés en conséquence.

À noter que cette famille de graphe apparaît déjà dans la littérature pour démontrer le résultat désiré avec l'ordre  $\subseteq_i$  [Atserias et al., 2008]. La preuve ci-après est une adaptation à  $\subseteq$ , qui implique le résultat pour  $\subseteq_i$ .

## B.1 Étude d'une famille de graphes

On note  $G_k$  le graphe obtenu à partir d'un  $k$ -cycle auquel on ajoute 2 sommets distingués (blancs) reliés à tous les sommets du cycle.

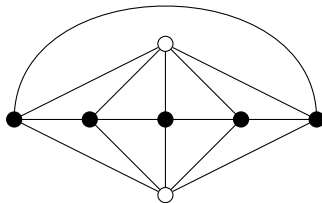


FIGURE B.1 – Le graphe  $G_5$

**Remarque.** — L'idée est de construire un cycle et de distinguer un point à l'intérieur du cycle et un point à l'extérieur. Tout nœud connecté à ces deux points doit intuitivement couper une arête du cycle, et cela permet de limiter le nombre de sur structures planaires.

**Lemme 62 (Antichaine infinie).** — La famille des  $G_k$  forme une antichaine infinie pour  $\subseteq$  et  $\subseteq_i$ .

*Démonstration.* Si  $G_k \subseteq G_l$  alors  $k \leq l$  puis  $G_l$  contient un  $k$ -cycle de sommets non coloriés ce qui n'est possible que si  $k = l$ . □

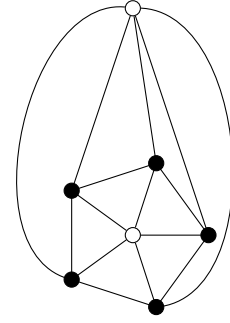


FIGURE B.2 – Le graphe  $G_5$  représenté comme une roue

**Lemme 63 (Comparaison des ordres).** — Si  $k \geq 4$  alors  $G_k \subseteq H$  dans  $\mathcal{C}(B)$  implique  $G_k \subseteq_i H$ .

*Démonstration.* On traite simplement le cas où on ajoute un seul élément (couleur, sommet, arête) à  $G_k$ , et cette preuve s'adapte pour un  $H$  plus général.

**Si on ajoute un sommet** Ce sommet étant isolé, on a bien  $G_k \subseteq_i H$

**Si on ajoute une arête blanc/blanc** Alors le graphe  $H$  obtenu n'est plus planaire. En effet, en contractant les arêtes entre sommets non coloriés jusqu'à avoir un cycle de taille 3 on obtient la clique  $K_5$ .

Donc  $K_5$  est un mineur de  $H$ , ce qui montre que  $H$  n'est pas planaire.

**Si on ajoute une arête noir/blanc** Cette arête existe déjà dans  $G_k$  par construction, donc  $H = G_k$ .

**Si on ajoute une arête noir/noir** Alors on peut contracter les arêtes du cycle noir pour obtenir un 4-cycle.

De plus, par hypothèse, ce 4-cycle noir se décompose en deux 2-cycles noirs.

Il est alors aisé de vérifier que  $K_{3,3}$  est un sous graphe du graphe que l'on vient de construire, et donc un mineur.

Ainsi  $K_{3,3}$  est un mineur de  $H$  ce qui est absurde car  $H$  est planaire. □

**Lemme 64 (Sous-structure particulière [Atserias et al., 2008]).** — Soit  $n \geq 3$  et  $G_n \subsetneq H$  alors aucun sommet de  $H - G_n$  n'est adjacent aux deux sommets blancs de  $G_n$ .

*Démonstration.* Le résultat est connu pour  $\subseteq_i$  [Atserias et al., 2008] et il suffit donc d'appliquer le Lemme 63. □

## B.2 Une formule contre-exemple

**Définition 65 (La formule  $\phi$ ).** — On construit des formules simples

$$\theta \triangleq B(x) \wedge B(y)$$

$$\tau(z) \triangleq E(z, x) \wedge E(z, y) \wedge z \neq x \wedge z \neq y$$

$$\rho \triangleq \exists z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_4.$$

$$\bigwedge_{i=1}^4 \tau(z_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq 4} E(z_i, z_j)$$

$$\psi \triangleq \forall z. \tau(z) \implies \exists z_1 \neq z_2 \neq z.$$

$$\tau(z_1) \wedge \tau(z_2) \wedge E(z, z_1) \wedge E(z, z_2)$$

$$\delta \triangleq \forall z. B(z) \implies z = x \vee z = y$$

Et on définit alors

$$\phi \triangleq \exists x \neq y. \theta \wedge \rho \wedge (\delta \implies \psi) \quad (\text{B.1})$$



FIGURE B.3 – Modèle minimal de la formule  $\theta(x, y)$

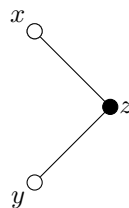


FIGURE B.4 – Modèle minimal de la formule  $\theta(x, y) \wedge \tau(z)$

**Lemme 66 (Les  $G_k$  sont des modèles).** — Pour tout  $k \geq 4$ ,  $G_k \models \phi$

*Démonstration.* Par construction pour  $k \geq 3$ ,  $G_k \models \theta$  et  $G_k \models \rho$ .

De plus  $G_k \models \delta$  car il y a uniquement deux sommets blancs, et  $G_k \models \psi$  car tous les sommets non blancs ont deux voisins non blancs.  $\square$

**Lemme 67 (Contenir  $G_n$ ).** — Soit  $H \models \phi \wedge \delta$  alors il existe  $n \geq 4$  tel que  $G_n \subseteq H$ .

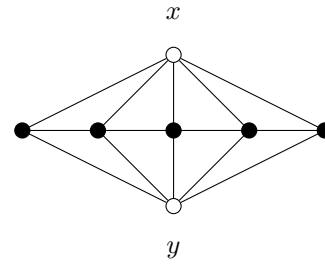


FIGURE B.5 – Modèle minimal de la formule  $\theta(x, y) \wedge \rho$

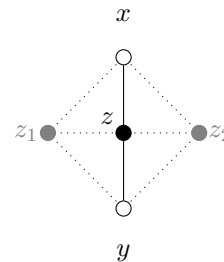


FIGURE B.6 – Illustration du comportement calculatoire de  $\theta(x, y) \wedge \psi$

*Démonstration.* Comme  $H \models \theta \wedge \delta$  on a deux uniques sommets blancs  $x$  et  $y$  dans  $H$ . Comme  $H \models \rho$  on sait de plus qu'il existe au moins 4 sommets noirs dans  $H$  reliés simultanément à  $x$  et  $y$  qui forment un chemin de 4 sommets.

De plus, comme  $H \models \delta$  on sait que  $H \models \psi$ , donc tous les sommets reliés simultanément à  $x$  et  $y$  ont deux voisins de même type.

Ainsi, les sommets reliés simultanément à  $x$  et  $y$  forment des cycles. Mais par construction on a déjà un chemin de taille 4, et donc un cycle de taille au moins 4. Ainsi, il existe  $n \geq k$  tel que  $G_n \subseteq H$ .  $\square$

**Lemme 68 (Monotonie).** — Si  $G \models \phi$  et  $G \subseteq H$  dans  $\mathcal{C}(B)$  alors  $H \models \phi$ .

*Démonstration.* Soit  $G \models \phi$  et  $G \subseteq H$  dans  $\mathcal{C}(B)$ .

On remarque que les formules  $\theta$  et  $\rho$  sont syntaxiquement monotones pour l'ordre  $\subseteq$ . De même,  $\neg\delta$  est syntaxiquement monotone pour  $\subseteq$ .

Ainsi, on sait que  $H \models \rho$  et  $H \models \theta$ .

Si  $H \not\models \delta$  alors  $H \models \phi$  de manière évidente.

Si  $H \models \delta$  alors Comme  $\neq \delta$  est monotone, on a nécessairement  $G \models \delta$ .

Ainsi, il existe  $k \geq 4$  tel que  $G_k \subseteq G \subseteq H$ . En utilisant le lemme 63 et le lemme 64 on déduit non seulement  $G_k \subseteq_i H$  mais aussi que tout sommet

dans  $H - G_k$  n'est pas relié simultanément à  $x$  et  $y$  dans  $H$ . Ainsi, on vérifie bien  $\psi$ . □

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que jamais la taille de la structure n'est entrée en compte, seulement des considérations locales sont faites. □

**Lemme 69 (Modèles minimaux).** — Les  $G_k$  pour  $k \geq 4$  sont des modèles minimaux de  $\phi$ .

*Démonstration.* Soit  $k \geq 4$  et  $H \subseteq G_k$  tel que  $H \models \phi$ . Notons  $x$  et  $y$  les deux sommets blancs de  $G_k$ .

- (1) On sait déjà que  $x$  et  $y$  sont dans  $H$  car  $H \models \theta$
- (2) On sait de plus qu'un chemin de quatre sommets noirs dans  $G_k$  reliés simultanément à  $x$  et  $y$  est dans  $H$ .
- (3) Par construction  $H$  vérifie  $\delta$ , et donc  $H \models \psi$ . Ainsi, tout sommet dans  $H$  relié à  $x$  et  $y$  simultanément est de degré exactement 4. Ceci n'est possible que si tous les sommets de  $G_k$  sont dans  $H$ .

On a donc montré  $H = G_k$ . Donc  $G_k$  est bien un modèle minimal. □

### B.3 Adaptation sans couleurs

**Lemme 70 (Adaptation sans couleurs).** — Si on travaille sur des graphes sans couleurs, on peut définir  $B(x) = \deg(x) \geq 5$  et le contre-exemple précédent reste valide.

*Démonstration.* La définition précédente de  $B(x)$  donne une FO-interprétation monotone de `PlanarGraph` vers `PlanarGraph2Cols`. Cette fonction n'est pas surjective, mais son image contient l'ensemble des  $G_k$  pour  $k \geq 5$  qui est définissable et donc l'ensemble des graphes planaires sans couleur ajoutée n'est pas logiquement préspectral. □

### B.4 Notes sur les modèles finis

S'il est connu que des théorèmes de préservations sont valides pour `FinStr`  $\sigma$  où  $\sigma$  est une signature relationnelle finie [Chang and Keisler, 1990], la construction utilise un théorème de compacité et ne se relativise pas à une sous classe. La construction sur les graphes planaires donne un contre-exemple explicite au théorème dans le cadre des graphes planaires *même infinis*.

**Propriété 71 (Non théorème de préservation).** — L'ensemble des graphes planaires simples (pas nécessairement finis) ne possède pas de théorème de préservation pour l'ordre  $\subseteq_i$ .