

Savez-vous ce qu'est un théorème de préservation ?

Théorèmes de préservation

Stage de M2, MPRI

Aliaume Lopez

11 Juin 2019

Sylvain Schmitz

Jean Goubault-Larrecq

école —————
normale —————
supérieure —————
paris-saclay —————

Motivations



Théorème de préservation

Une formule $\phi \in \text{FO}[\sigma]$, **croissante**, est équivalente à une formule ψ dans un fragment **simple**.



Théorème de préservation

Une formule $\phi \in \text{FO}[\sigma]$, **croissante**, est équivalente à une formule ψ dans un fragment **simple**.

Correspondance : Base de donnée \leftrightarrow Modèle fini

L'évaluation sur une base de donnée **incomplète** correspond à l'évaluation sur une **classe** de structures.

1. L'existence de modèle universel est caractérisée par un théorème de préservation dans l'algorithme de Chase (Deutsch et al., 2008)
2. L'évaluation naïve d'une requête Q fonctionne, ssi Q est croissante (Gheerbrant et al., 2014)

Contexte

Structures et logique



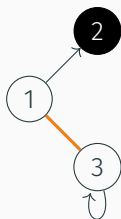
Structures finies sur $\sigma \triangleq \{\bullet, \longrightarrow, \text{---}\}$

$$D \triangleq \{1, 2, 3\}$$

$$[\bullet] \triangleq \{2\}$$

$$[\longrightarrow] \triangleq \{(1, 2), (3, 3)\}$$

$$[\text{---}] \triangleq \{(1, 3), (3, 1)\}$$



Formules FO[$\bullet, \longrightarrow, \text{---}$]

$$\begin{aligned} \phi := & \exists x. \phi \mid \phi \wedge \psi \mid \neg \phi \\ & \mid \bullet x \mid x \text{---} y \\ & \mid x \longrightarrow y \end{aligned}$$

$$\exists x. \forall y. \neg((\bullet y) \wedge \neg(x \text{---} y))$$

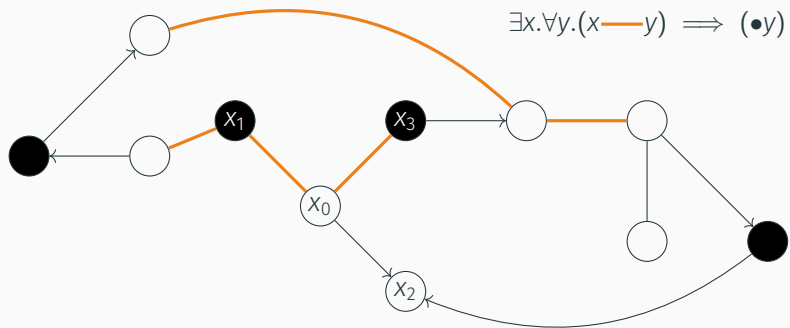


FIGURE 1 : Les formules FO sont locales

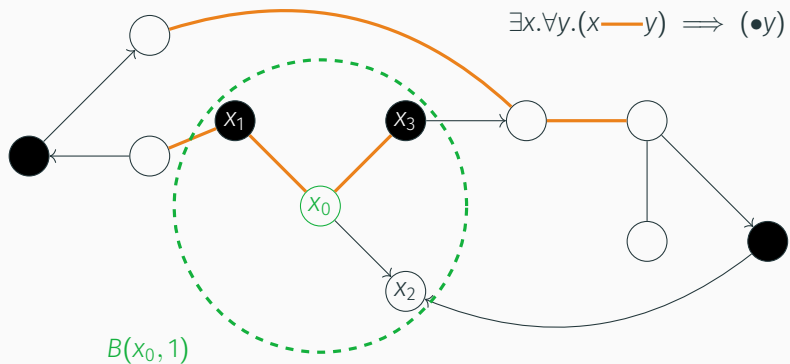


FIGURE 1 : Les formules FO sont locales



Préordres sur les structures

Sous-structure induite	\subseteq_i	Homomorphisme injectif fort
Sous-structure	\subseteq	Homomorphisme injectif
Homomorphisme	\rightarrow	Homomorphisme

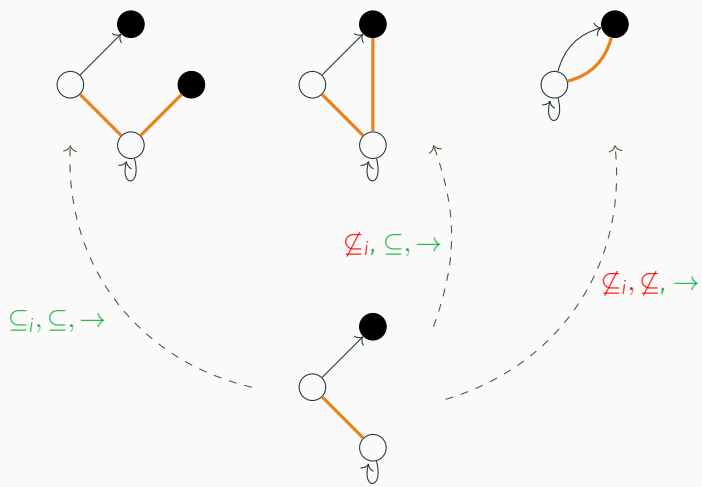


FIGURE 2 : Illustration des différents préordres

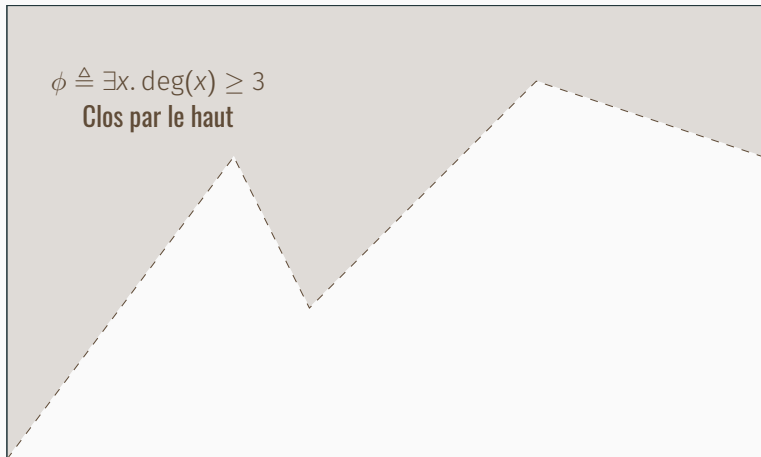


FIGURE 3 : Graphes finis, encodés par $\Sigma \triangleq \{E\}$

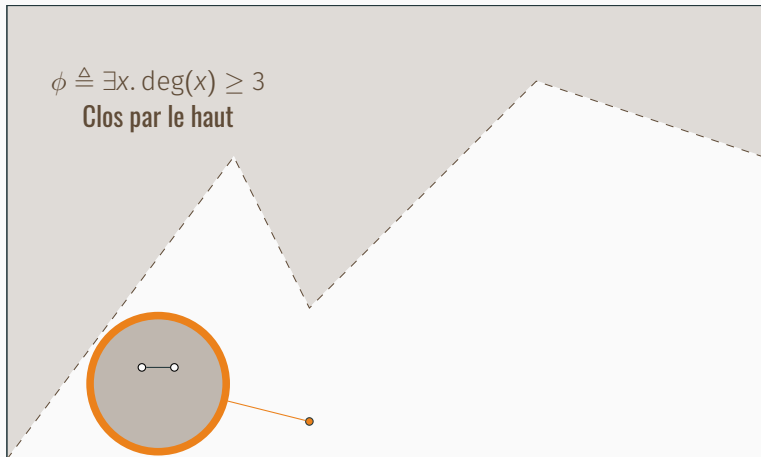


FIGURE 3 : Graphes finis, encodés par $\Sigma \triangleq \{E\}$

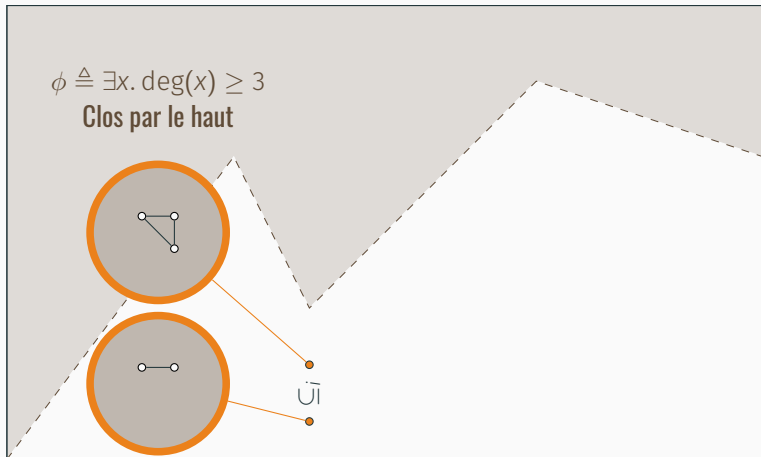


FIGURE 3 : Graphes finis, encodés par $\Sigma \triangleq \{E\}$

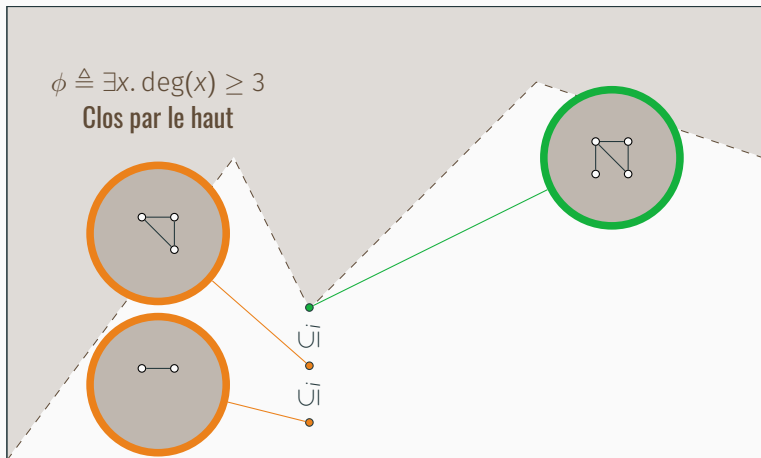


FIGURE 3 : Graphes finis, encodés par $\Sigma \triangleq \{E\}$

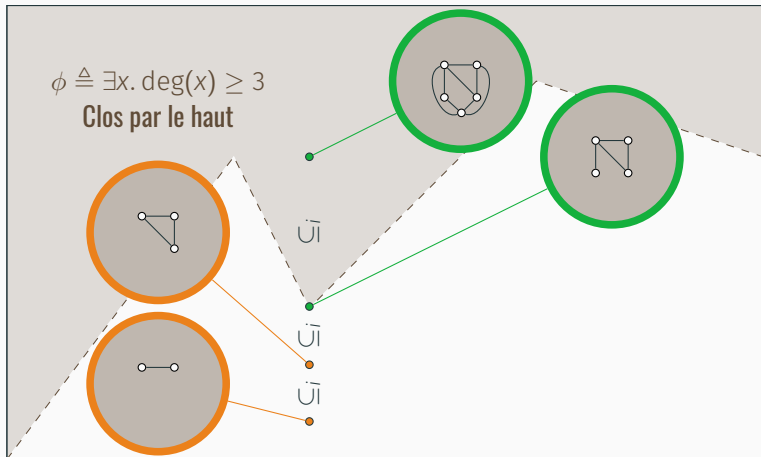


FIGURE 3 : Graphes finis, encodés par $\Sigma \triangleq \{E\}$

Contexte

Théorèmes de préservation



Résultats connus

Ordre	Fragment
\subseteq_i	EFO
\subseteq	EPFO \neq
\rightarrow	EPFO



Résultats connus

	Str(σ)	Ordre	Fragment
Łós-Tarski ✓		\subseteq_i	EFO
Tarski-Lyndon ✓		\subseteq	EPFO \neq
H.P.T. ✓		\rightarrow	EPFO





Résultats connus

	Str(σ)	Ordre	Fragment	FinStr(σ)
Łós-Tarski	✓	\subseteq_i	EFO	✗ Tait (1959)
Tarski-Lyndon	✓	\subseteq	EPFO \neq	✗ Ajtai and Gurevich (1994)
H.P.T.	✓	\rightarrow	EPFO	✓ Rossman (2008)





Propriété

Les théorèmes de préservation **ne relativisent ni ne s'étendent**

Contexte

Deux exemples orthogonaux



Théorème de Łós-Tarski

Soit ϕ une formule close, préservée par sous-structure induite. Il existe une formule existentielle close ψ , telle que $\phi \iff \psi$.



Théorème de Łoś-Tarski

Soit ϕ une formule close, préservée par sous-structure induite. Il existe une formule existentielle close ψ , telle que $\phi \iff \psi$.

Preuve

Considérons $T_V \triangleq \{\theta \mid \phi \vdash \theta \text{ et } \theta \text{ universelle}\}$. Par construction, $\phi \vdash T_V$.

Soit M un modèle de T_V , montrons que M est un modèle de ϕ . Pour cela, considérons $\{\phi\} \cup \text{Diag}(M)$. Par la surcharge, cette théorie est incohérente, le théorème de compacité permet d'en extraire une théorie finie incohérente de $\{\phi\} \cup \text{Diag}(M)$ est stable par conjonction finie et est cohérente. Ainsi, il existe une formule $\theta \in \text{Diag}(M)$ telle que ϕ, θ est incohérente.

Par construction cela veut dire que $\phi \vdash \neg\theta$. Ainsi, $\neg\theta \in T_V$, et donc $M \models \neg\theta$, ce qui est absurde.

Ainsi, $\{\phi\} \cup \text{Diag}(M)$ possède un modèle N , par construction $M \subseteq_i N$, $N \models \phi$ donc $M \models \phi$.

Par la suite, $\{\neg\phi\} \cup T_V$ est incohérente. Donc en utilisant le théorème de compacité, on déduit que celle-ci possède un sous-ensemble fini incohérent. Comme T_V est cohérente, on a donc une formule dans T_V qui est équivalente à ϕ .

Compacité



Propriété

L'ensemble $\mathcal{P} = \{P_k \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ des chemins vérifie un théorème de préservation pour \subseteq_j .

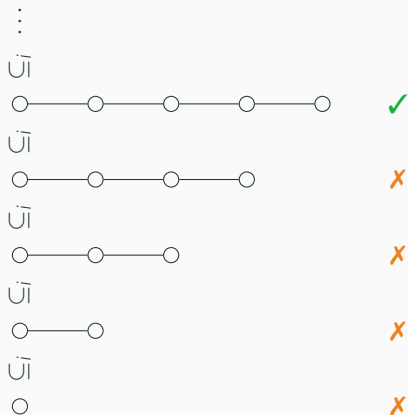


FIGURE 4 : Évaluation d'une formule croissante ϕ sur \mathcal{P}



Propriété

Une formule ϕ préservée par \subseteq_i sur \mathcal{P} est équivalente à

$$\exists x_1, \dots, \exists x_k. x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_k \quad (1)$$



Propriété

Une formule ϕ préservée par \subseteq_i sur \mathcal{P} est équivalente à

$$\exists x_1, \dots, \exists x_k. x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_k \quad (1)$$

Remarques

- (i) L'ordre \subseteq_i est *total* et *bien fondé* sur \mathcal{P}
- (ii) Les propriétés de la logique FO ne sont pas utilisées



Beau préordre / wqo (e.g. Kruskal, 1972)

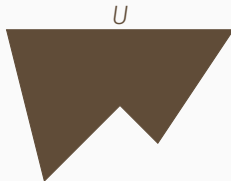


FIGURE 5 : Tout clos par le haut non vide U possède une base finie non vide d'éléments minimaux



Beau préordre / wqo (e.g. Kruskal, 1972)

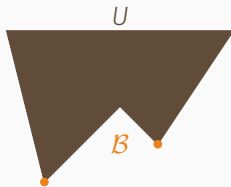


FIGURE 5 : Tout clos par le haut non vide U possède une base finie non vide d'éléments minimaux



Beau préordre / wqo (e.g. Kruskal, 1972)

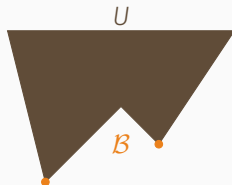


FIGURE 5 : Tout clos par le haut non vide U possède une base finie non vide d'éléments minimaux

Application

wqo \implies preservation (2)



Propriété

L'ensemble $\mathcal{C} = \{C_k \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 3}\}$ des cycles simples, vérifie un théorème de préservation pour \subseteq_i .

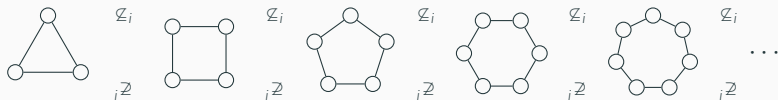


FIGURE 6 : Évaluation d'une formule croissante ϕ sur \mathcal{C}

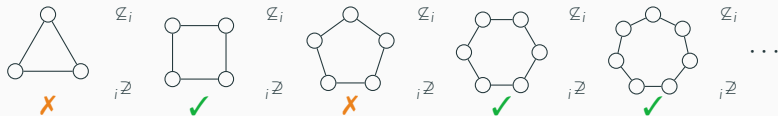


FIGURE 6 : Évaluation d'une formule croissante ϕ sur \mathcal{C}

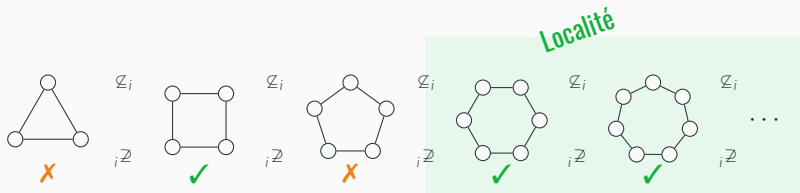


FIGURE 6 : Évaluation d'une formule croissante ϕ sur \mathcal{C}

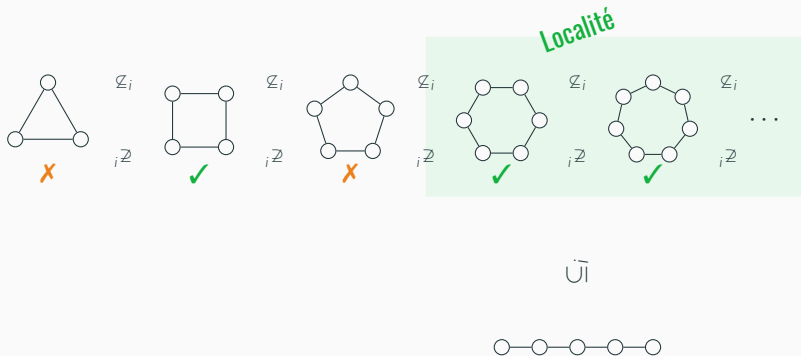


FIGURE 6 : Évaluation d'une formule croissante ϕ sur \mathcal{C}



Résultat

Une formule ϕ préservée par \subseteq_i sur \mathcal{C} est équivalente à une formule de la forme

$$\left(\bigvee_{k \in D} \psi_{C_k} \right) \vee \psi_{P_n} \quad (3)$$

$$\left(\bigvee_{k \in D} \psi_{C_k} \right) \quad (4)$$

Avec D un ensemble fini d'entiers inférieurs à k et
 $M \models \psi_U \iff U \subseteq_i M$.



Résultat

Une formule ϕ préservée par \subseteq_i sur \mathcal{C} est équivalente à une formule de la forme

$$\left(\bigvee_{k \in D} \psi_{C_k} \right) \vee \psi_{P_n} \quad (3)$$

$$\left(\bigvee_{k \in D} \psi_{C_k} \right) \quad (4)$$

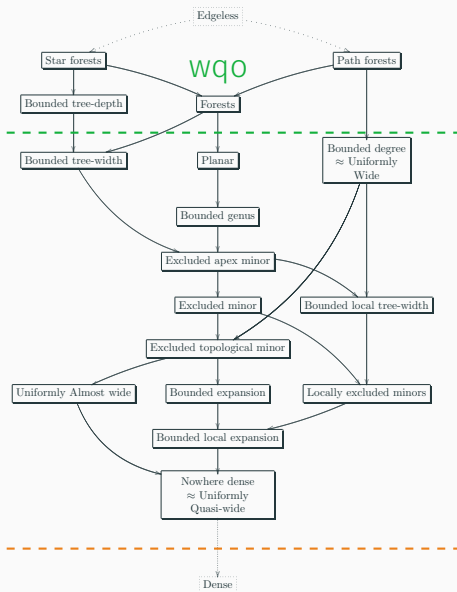
Avec D un ensemble fini d'entiers inférieurs à k et
 $M \models \psi_U \iff U \subseteq_i M$.

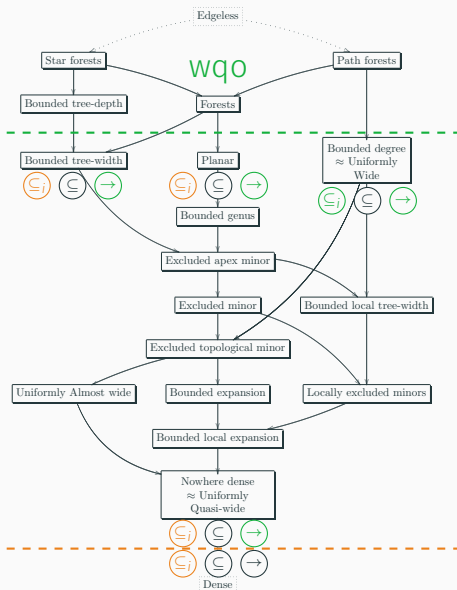
Remarques

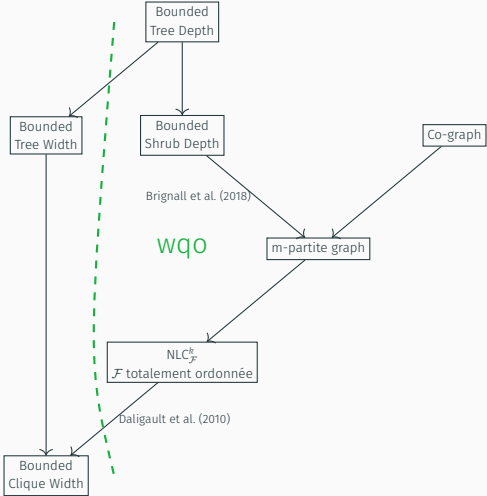
- (i) L'ordre \subseteq_i est l'isomorphisme sur \mathcal{C} , qui n'est pas wqo.
- (ii) La localité de FO est utilisée

Contexte

Un paysage complexe







Contribution personnelle

Espaces logiquement pré-spectraux



Espace logiquement pré-spectraux

$$U = \llbracket \phi \rrbracket$$



FIGURE 7 : Tout clos par le haut définissable non vide U possède une base finie non vide d'éléments minimaux finis



Espace logiquement pré-spectraux

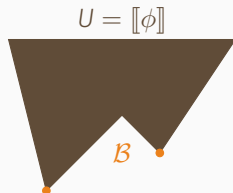


FIGURE 7 : Tout clos par le haut définissable non vide U possède une base finie non vide d'éléments minimaux finis



Lien avec les théorèmes de préservation

- (i) Si X est logiquement pré-spectral, alors X possède un théorème de préservation
- (ii) Si X possède un théorème de préservation et X clos par le bas dans $\text{FinStr}(\sigma)$, alors X logiquement pré-spectral



Lien avec les théorèmes de préservation

- (i) Si X est logiquement pré-spectral, alors X possède un théorème de préservation
- (ii) Si X possède un théorème de préservation et X clos par le bas dans $\text{FinStr}(\sigma)$, alors X logiquement pré-spectral

Revenons sur les exemples

- (i) L'ensemble \mathcal{P} est logiquement pré-spectral pour \subseteq_i .
- (ii) L'ensemble \mathcal{C} n'est pas logiquement pré-spectral mais possède un théorème de préservation
- (iii) L'ensemble des graphes de degré borné par 2 est **logiquement pré-spectral** pour \subseteq_i , mais **pas wqo**.

Contribution personnelle

Propriétés de stabilité



FO-interprétation, surjective, monotone

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{D}$$

Stabilité des espaces logiquement pré-spectraux par restriction

1. À un clos par le haut définissable
2. À un clos par le bas définissable



Stabilité des espaces logiquement pré-spectraux par opérations

	Nom	Classe	Éléments
	Union disjointe	$\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$	
	Produit cartésien	$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$	$A \uplus_{<} B$
	Produit point à point	$\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}$	$A \times B$
	Mots finis (non vides)	\mathcal{C}^*	$A_1 \uplus_{<} \dots \uplus_{<} A_n$
	Produit en couronne ¹	$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$	

1. Sous restriction

Contribution personnelle

Exemples

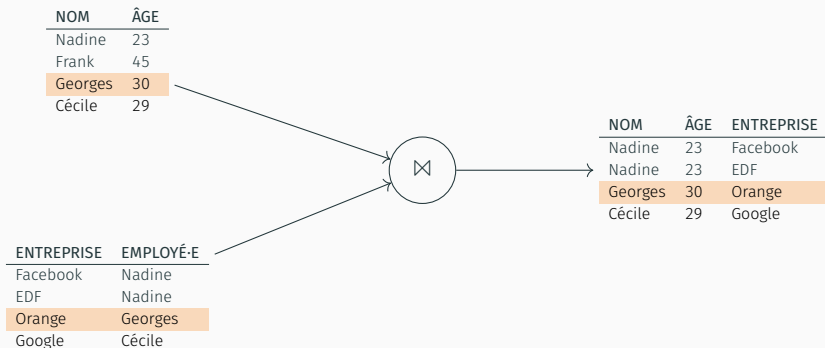


FIGURE 8 : Inner join de deux tables pour **NOM=EMPLOYÉ·E**

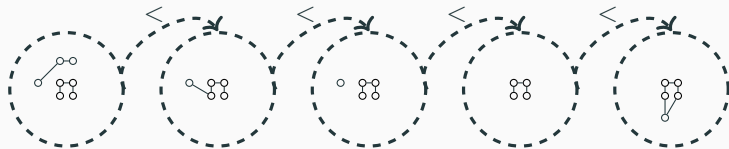


FIGURE 9 : Un élément de $(\text{Graph}_{\leq 2})^*$

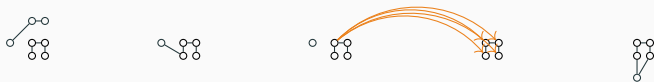


FIGURE 9 : Un élément de $(\text{Graph}_{\leq 2})^*$

Conclusion



Présentés

1. Cadre général pour l'étude des théorèmes de préservation
2. Propriétés de stabilité qui sortent des résultats connus
3. Attention : utilisation délicate

« Certaines batailles se gagnent en silence. »

1. Contre exemples et exemples adaptés pour \subseteq
2. Adaptation des exemples/contre-exemples à $\mathcal{C} = \text{Graph}$
3. Étude de tree-depth pour les structures



Pistes de réflexion

- (i) Énumération de formules (Schweikardt et al., 2018)
- (ii) Évaluation rapide de formules (Grohe et al., 2017)
- (iii) Logiques plus puissantes (Kuske and Schweikardt, 2018)
- (iv) Capturer plus de classes topologiquement ? (Nešetřil and Ossona de Mendez, 2012, Chapter 10)

- Ajtai, M. and Gurevich, Y. (1994). Datalog vs first-order logic.
- Brignall, R., Engen, M., and Vatter, V. (2018). A counterexample regarding labelled well-quasi-ordering. *Graphs and Combinatorics*, 34(6) :1395–1409.
- Daligault, J., Rao, M., and Thomassé, S. (2010). Well-quasi-order of relabel functions. *Order*, 27(3) :301–315.
- Deutsch, A., Nash, A., and Remmel, J. B. (2008). The chase revisited. In *Proceedings of the Twenty-Seventh ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART Symposium on Principles of Database Systems, PODS 2008, June 9-11, 2008, Vancouver, BC, Canada*, pages 149–158.
- Gheerbrant, A., Libkin, L., and Sirangelo, C. (2014). Naïve evaluation of queries over incomplete databases. *ACM Trans. Database Syst.*, 39(4) :31 :1–31 :42.

- Grohe, M., Kreutzer, S., and Siebertz, S. (2017). Deciding first-order properties of nowhere dense graphs. *Journal of the ACM (JACM)*, 64(3) :17.
- Kruskal, J. B. (1972). The theory of well-quasi-ordering : A frequently discovered concept. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 13(3) :297–305.
- Kuske, D. and Schweikardt, N. (2018). Gaifman Normal Forms for Counting Extensions of First-Order Logic. In Chatzigiannakis, I., Kaklamanis, C., Marx, D., and Sannella, D., editors, *45th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2018)*, volume 107 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 133 :1–133 :14, Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.
- Nešetřil, J. and Ossona de Mendez, P. (2010). First order properties on nowhere dense structures. *The Journal of Symbolic Logic*, 75(3) :868–887.

- Nešetřil, J. and Ossona de Mendez, P. (2012). *Sparsity : Graphs, Structures, and Algorithms*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Rossmann, B. (2008). Homomorphism preservation theorems. *J. ACM*, 55(3) :15 :1–15 :53.
- Schweikardt, N., Segoufin, L., and Vigny, A. (2018). Enumeration for queries over nowhere dense graphs. In *Proceedings of the 37th ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI Symposium on Principles of Database Systems*, pages 151–163. ACM.
- Tait, W. W. (1959). A counterexample to a conjecture of scott and suppes. *The journal of symbolic logic*, 24(1) :15–16.