Algèbre Linéaire

MPSI– SEMAINE 17

Pour Leslie Rineau,

▪ **374** ▪ TAGS : mpsi | projecteur | vectoriel | lineaire |
Exercice 1 *(Encore des projecteurs).*
Soient f et g deux endomorphismes qui vérifient $f \circ g = id$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$
2. Montrer
$$E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\,(g)$$
3. Dans quel cas peut-on dire que $g = f^{-1}$?
4. Calculer $(g \circ f)^2$. En déduire une caractérisation de $g \circ f$.

La chose qui te manquait (si mon souvenir est exact) c'est le fait que E soit inclus dans la somme dans la question 2.

Pour cela, l'indication suivante devrait suffire : plutôt que de considérer $g(x)$ pour produire l'élément dans $\mathrm{Im}\,(g)$, considérer ... $g(f(x))$. C'est assez naturel car c'est sur cet élément que l'on a des informations relatives à f (on vient de démontrer une égalité de noyaux...)

La question 3 est assez simple, il ne faut pas chercher bien loin. Son intérêt réside simplement dans le fait qu'un élément de $L(E)$ peut posséder un inverse à gauche et pas d'inverse à droite. Un exemple est le suivant : Considérer $\mathbb{R}[X]$ et les endomorphismes $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto \int P$ (la primitive qui s'annule en zéro).

On constate que $f \circ g = id$, mais en revanche f n'est pas inversible (car elle n'est pas injective).

Au vu du début de la khôlle, la dernière question ne devrait pas te poser de problème particulier.

▪ **373** ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | factorisation | lineaire | universel |
Exercice 2 *(Factorisation !)*.
On suppose $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer
$$\mathrm{Im}\,(g) \subseteq \mathrm{Im}\,(f) \iff \exists h \in \mathcal{L}(E), g = f \circ h$$
Indication : Considérer un supplémentaire de $\ker f$ *dans* E
2. Montrer
$$\ker f \subseteq \ker g \iff \exists h \in \mathcal{L}(E), g = h \circ f$$

▪ **376** ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | projecteur | lineaire |
Exercice 3 *(Somme de projecteurs)*.
Soient p, q deux projecteurs. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p$.

Pour l'exercice ci-dessus, montrer d'abord que $p \circ q = -p \circ q$, montrer aussi $p \circ q = q \circ p$[1] et en déduire que $p \circ q = q \circ p = 0$.

Remarque : ce qui a été fait en khôlle (étude via la décomposition en sous espaces) se généralisera très bien, contrairement à l'astuce donnée en indication pour faire le calcul rapidement.

1. astuce, composer l'égalité $(p+q)^2 = p + q$ une fois par p et une fois par q...