Probablités (3)

MP– SEMAINE 17

▪ **389** ▪ TAGS : mp | reduction | matrice | polynome | caracteristique |

Exercice 1 *(Valeurs propres et produit de Kronecker).*

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{pmatrix} (= A_1 \otimes A_n) \tag{1}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A_n pour tout $n \geq 1$
2. Calculer le déterminant de A_n
3. Déterminer la trace de A_n
4. Quel est le rang de A_n ?

Correction

Il y a principalement 2 manières de faire, avec une petite variante intermédiaire.

La première méthode est assez simple, et c'est celle que je voulais voir. Les deux suivantes sont plus à titre culturel, car ce sont des méthodes très classiques (calcul de polynômes caractéristiques par blocs) qui ont d'ailleurs fait l'objet de sujets de concours (quelques questions).

Néanmoins, je me rends compte en le faisant que tu avais mal calculé le polynôme caractéristique de la matrice A_1 ! Ce n'est pas $X^2 - 1$ mais $X^2 - 2$.

Méthode 1 On sait diagonaliser la matrice A_1 sous la forme $Diag(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

On a donc la matrice A_n qui est semblable à

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}A_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}A_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

On peut alors prouver par récurrence que A_n est diagonalisable et que ses valeurs propres sont $-\sqrt[n]{2}$ et $\sqrt[n]{2}$.

Méthode 2 On commence pareil sauf qu'on ne veut pas inventer l'hypothèse de récurrence.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique donc

$$\chi_{A_{n+1}} = \begin{vmatrix} XI_{2^n} - \sqrt{2}A_n & 0 \\ 0 & XI^{2^n} + \sqrt{2}A_n \end{vmatrix} = \chi_{-\sqrt{2}A_n}(X)\chi_{\sqrt{2}A_n}(X) \tag{3}$$

Or on peut exprimer le polynôme caractéristique de αA_n en fonction de celui de A_n (exercice à la maison). Cela donne immédiatement le résultat.

Méthode 3 On peut aussi calculer directement le polynôme caractéristique de la matrice A_{n+1} par blocs.

Prenons λ qui n'est pas une valeur propre de A_n. Alors $\lambda I_{2^n} - A_n$ est inversible, notons D son inverse pour alléger les notations.

On peut donc montrer que

$$\begin{vmatrix} \lambda I_{2^n} - A_n & -A_n \\ -A_n & \lambda I_{2^n} + A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_{2^n} - A_n & -A_n \\ 0 & \lambda I_{2^n} + A_n - A_n \times D \times A_n \end{vmatrix} \tag{4}$$

Mais en calculant ce déterminant par blocs (est-ce connu ?) on obtient

$$\det(\lambda I_{2^n} - A_n) \det(\lambda I_{2^n} + A_n - A_n \times D \times A_n) \tag{5}$$

Et en utilisant la multiplicativité du déterminant

$$\det((\lambda I_{2^n} - A_n)(\lambda I_{2^n} + A_n) - (\lambda I_{2^n} - A_n)A_n \times D \times A_n) \tag{6}$$

Ce qui se simplifie (car D et A_n commutent ... exercice : le justifier !)

$$\det\left(\lambda^2 I_{2^n} - A_n^2 - A_n^2\right) \tag{7}$$

On a donc pour λ qui n'est pas une valeur propre de A_n l'égalité suivante

$$\chi_{A_{n+1}}(\lambda) = \det\left((\lambda - \sqrt{2}A_n)(\lambda + \sqrt{2}A_n)\right) = \det(\lambda - \sqrt{2}A_n)\det(\lambda + \sqrt{2}A_n) \tag{8}$$

Reste à justifier que les *polynômes* sont égaux. Ce sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, leur différence aussi, et elle possède une infinité de racines (car A_n possède un nombre fini de valeurs propres). Leur différence est donc le polynôme nul : on a bien égalité des polynômes.

Par la suite on peut conclure comme pour la méthode précédente.