Exercice 1 - Décroissance très rapide à l'infini

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction de classe C^1 telle que f'/f tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Montrer que la série converge et donner un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $R_n = \sum_{k\geq n} f(k)$.

Exercice 2 - Produit de racines carrées et maximum

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Prouver la convergence de $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ et de $\sum_n \max(u_n, v_n)$.

Exercice 3 - Terme général positif et décroissant

Soit (u_n) une suite positive et décroissante. Prouver que si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors (nu_n) tend vers 0.

Exercice 4 - Condensation...

Soit (u_n) une suite décroissante positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Exercice 5 - Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l.$$

1. On suppose $l < 1$ et on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
   (a) Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a
   $$u_n \leq (l+\varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$
   (b) En déduire que $\sum_n u_n$ converge.
2. On suppose $l > 1$. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge.
3. Étudier le cas $l = 1$.

Exercice 6 - Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l.$$

1. On suppose $l < 1$ et on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
   (a) Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a
   $$u_n \leq (l+\varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$
   (b) En déduire que $\sum_n u_n$ converge.
2. On suppose $l > 1$. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge.
3. Étudier le cas $l = 1$.

Exercice 7 - Produit de racines carrées et maximum

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Prouver la convergence de $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ et de $\sum_n \max(u_n, v_n)$.

Exercice 8 - Terme général positif et décroissant

Soit (u_n) une suite positive et décroissante. Prouver que si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors (nu_n) tend vers 0.

Exercice 9 - Condensation...

Soit (u_n) une suite décroissante positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Exercice 10 - Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l.$$

1. On suppose $l < 1$ et on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
   (a) Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a
   $$u_n \leq (l+\varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$
   (b) En déduire que $\sum_n u_n$ converge.
2. On suppose $l > 1$. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge.
3. Étudier le cas $l = 1$.

Exercice 11 - Produit de racines carrées et maximum

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Prouver la convergence de $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ et de $\sum_n \max(u_n, v_n)$.

Exercice 12 - Formule de Stirling

1. Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.
2. On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :
   $$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Exercice 13 - Décroissance très rapide à l'infini

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction de classe C^1 telle que f'/f tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Montrer que la série converge et donner un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $R_n = \sum_{k \geq n} f(k)$.

Exercice 14 - Sans le critère des séries alternées

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$, et on note, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k},\ u_n = S_{2n},\ v_n = S_{2n+1}.$$

1. La série est-elle absolument convergente?
2. Démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Conclure que la série est convergente.

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site http://www.bibmath.net