
Dimension & Suites

MPSI- SEMAINE 18

1 Suites

▪ 158 ▪ TAGS :

Exercice 1 ().

Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$f(f(x)) + f(x) = 2x \quad \text{pour tout } x > 0$$

Indication : on considérera $u_0 \in \mathbb{R}$ et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$

▪ 159 ▪ TAGS :

Exercice 2 ().

Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f \circ f(x) = 6x - f(x)$.

Indication : faire apparaître une suite récurrente.

▪ 394 ▪ TAGS : mpsi | dimension | suite | vectoriel |

Exercice 3 (Suites périodiques).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'espace des suites réelles p périodiques.

Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

2 Dimension

▪ 368 ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | supplémentaire |

Exercice 4 (Supplémentaires).

1. Si F et G possèdent un supplémentaire commun dans E , montrer que F et G sont isomorphes

Indication : Considérer une projection...

2. On suppose F et G isomorphes, on veut montrer la réciproque du (1) quand E est de dimension finie.

- (a) Que dire de leur dimension ?
- (b) Conclure dans le cas où $\dim F = \dim E$
- (c) Conclure dans le cas où F et G sont des hyperplans de E
- (d) En déduire une preuve par récurrence sur la codimension de F

3. Montrer que la réciproque est fautive en dimension infinie

Indication : Considérer $E = k[X]$, $F = E$, $G = XE$...

▪ 369 ▪ TAGS : mpsi | isomorphisme | vectoriel | dim finie |

Exercice 5 (Isomorphismes en dimension finie).

1. Soit E un k -espace vectoriel de dimension n , montrer que E est isomorphe à k^n .
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux espaces vectoriels de dimension finie soient isomorphes.

▪ 395 ▪ TAGS : mpsi | dimension | intersection | vectoriel |

Exercice 6 (*Intesection d'espaces et dimension*). Soient U, V et W trois sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Si $\dim U + \dim V > n$ montrer que $U \cap V$ n'est pas réduit à 0
2. Si $\dim U + \dim V + \dim W > 2n$ que dire de $U \cap V \cap W$?

▪ 396 ▪ TAGS : mpsi | dimension | hyperplan | vectoriel |

Exercice 7 (*Intersection hyperplans*).

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel strict de E . Montrer que F peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplans. Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaire ?