Algèbre Linéaire

MPSI– SEMAINE 17

▪ **364** ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | suite |
Exercice 1 *(Calcul de suites).*
On considère E l'espace des suites complexes vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que E est de dimension 2
2. Trouver une base de E formée de suites géométriques
3. En déduire une expression de la suite (F_n) de E qui vérifie $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$.

▪ **365** ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | suite |
Exercice 2 *(Suite exacte).*
On dit qu'une suite $E_1 \to_{f_1} E_2 \to \cdots \to_{f_n} E_{n+1}$ est *exacte* si et seulement si $\operatorname{Im}(f)_i = \ker f_{i+1}$ pour chaque f_i.

1. On considère la suite exacte $\{0\} \to_f A \to_g B \to_h C \to_k \{0\}$. Montrer que

$$\dim B = \dim C + \dim A$$

Indication : Utiliser le théorème du rang

2. On considère une suite

$$\{0\} \to_{f_0} \to E_1 \to \cdots \to_{f_n} \to \{0\}$$

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$$

Indication : On utilisera le théorème du rang ...

▪ **366** ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | rang | lineaire |
Exercice 3 *(Inégalités de rang).* Soient f et g deux endomorphismes de E un espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$
2. En déduire

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f-g)$$

▪ **367** ▪ TAGS : mpsi | rang | vectoriel | projecteur |
Exercice 4 *(Rang et projecteurs).*
Soient u ev v deux endomorphismes de E (de dimension n) qui vérifient $u+v = id_E$ et $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leq n$.
Montrer que u et v sont des projecteurs

Indication : On pourra commencer par vérifier que $\ker u = \operatorname{Im}(v)$

▪ **364** ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | suite |
Exercice 5 *(Calcul de suites).*
On considère E l'espace des suites complexes vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que E est de dimension 2
2. Trouver une base de E formée de suites géométriques
3. En déduire une expression de la suite (F_n) de E qui vérifie $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$.

▪ **368** ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | supplementaire |
Exercice 6 *(Supplémentaires).*

1. Si F et G possèdent un supplémentaire commun dans E, montrer que F et G sont isomorphes

   Indication : Considérer une projection...

2. On suppose F et G isomorphes, on veut montrer la réciproque du (1) quand E est de dimension finie.

   (a) Que dire de leur dimension ?
   (b) Conclure dans le cas où $\dim F = \dim E$
   (c) Conclure dans le cas où F et G sont des hyperplans de E
   (d) En déduire une preuve par récurrence sur la codimension de F

3. Montrer que la réciproque est fausse en dimension infinie

   Indication : Considérer $E = k[X]$, $F = E$, $G = XE$...

▪ **376** ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | projecteur | lineaire |
Exercice 7 *(Somme de projecteurs).*
Soient p, q deux projecteurs. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p$.

▪ **375** ▪ TAGS : mpsi | lineaire | vectoriel | decomposition | sev |
Exercice 8 *(Décomposition de l'espace).* Soient $p_1, \dots p_n$ des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et

$$\sum_i p_i = id_E$$

1. Montrer que les p_j sont des projecteurs
2. Calculer le noyau de p_j
3. Montrer que l'espace E s'écrit
$$E = \sum_i \mathrm{Im}(p_i)$$
4. Montrer que cette somme est directe

▪ **374** ▪ TAGS : mpsi | projecteur | vectoriel | lineaire |
Exercice 9 *(Encore des projecteurs).*
Soient f et g deux endomorphismes qui vérifient $f \circ g = id$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$
2. Montrer
$$E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\,(g)$$
3. Dans quel cas peut-on dire que $g = f^{-1}$?
4. Calculer $(g \circ f)^2$. En déduire une caractérisation de $g \circ f$.

▪ **373** ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | factorisation | lineaire | universel |
Exercice 10 *(Factorisation !).*
On suppose $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer
$$\mathrm{Im}\,(g) \subseteq \mathrm{Im}\,(f) \iff \exists h \in \mathcal{L}(E), g = f \circ h$$

   Indication : Considérer un supplémentaire de $\ker f$ *dans* E

2. Montrer
$$\ker f \subseteq \ker g \iff \exists h \in \mathcal{L}(E), g = h \circ f$$

▪ **372** ▪ TAGS : mpsi | vectoriel | lineaire | stabilite | sev |

Exercice 11 *(Sous espaces stables)*.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous espace vectoriel de E stable par F.

1. Calculer $\ker f_{|F}$
2. Calculer $\mathrm{Im}\,(f)_{|F}$
3. Montrer que $\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1}$
4. On veut en déduire

$$\dim \ker f^{k+1} = \dim \ker f^k + \dim \mathrm{Im}\,(f)^k \cap \ker f$$

   On pose $g = f^k_{|\ker f^{k+1}}$.
   (a) Calculer $\ker g$
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f)^k \cap f^k(\ker f^{k+1})$
   (c) En déduire l'égalité désirée

Indication : Formule du rang...

5. Conclure que $\dim \ker f^{k+1} - \dim \ker f^k$ est une suite décroissante

▪ **371** ▪ TAGS : mpsi | dualite | vectoriel | base | dimfinie |

Exercice 12 *(Dualité)*.

1. Soient $f, g \in E^*$ telles que $\ker f \subseteq \ker g$, montrer que $g = \alpha f$ pour un certain α.
2. On suppose maintenant et pour la suite de l'exercice E de dimension finie n, montrer que E^* est de dimension n
3. De manière générale, comment passer d'une base de E à une base de E^* ?
4. Soit F un sev de E, et G un sev de E^* on pose

$$F^\perp = \{\phi \in E^* \mid \forall x \in F, \phi(x) = 0\}$$

$$G^\circ = \{x \in E \mid \forall \phi \in G, \phi(x) = 0\}$$

   (a) Montrer que

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$$

Indication : Considérer une base de F, la compléter et en déduire une base de $F^\perp$

   (b) Montrer que

$$\dim G + \dim G^\circ = \dim E^*$$

Indication : Considérer une base de G, la compléter et en déduire une base de G°

   (c) Montrer que $(F^\perp)^\circ = F$
   (d) Montrer que $(G^\circ)^\perp = F$
   (e) Montrer que $A^\circ \cap B^\circ = (A + B)^\circ$
   (f) Montrer que $A^\circ + B^\circ = (A \cap B)^\circ$
   (g) Montrer que les opérateurs $\square^\circ$ et $\square^\perp$ sont décroissants pour l'inclusion

5. *(application)* Soit $\phi \in E^*$ et $\phi_1, \dots \phi_r \in E^*$ telles que

$$\bigcap_{i=1}^{r} \ker \phi_i \subseteq \ker \phi$$

   (a) Montrer que $\ker \phi = \mathrm{Vect}(\phi)^\circ$
   (b) En déduire que $\phi \in \mathrm{Vect}(\phi_1 \dots \phi_r)$

▪ **370** ▪ TAGS : mpsi | dualite | vectoriel | base |

Exercice 13 *(Manipulations dans E^*).*

1. Soient $f, g \in E^* - \{0\}$, montrer

$$\exists x \in E, f(x)g(x) \neq 0$$

Indication : Que dire des noyaux de f et g ?

2. Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)-$uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k)$$

Indication : Déterminer une base de E^*