Dérivation / Convexité

▪ 305 ▪

Exercice 1 *(Théorème de Darboux).*

(a) Soit I un intervalle fermé et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f' a la propriété des valeurs intermédiaires.

Indication: Soit $y \in [f'(a), f'(b)]$, on recherche x tel que $f'(x) = y$ ... intégrer ...

(b) Montrer que la fonction partie entière n'admet pas de primitive

▪ 296 ▪

Exercice 2 *(Puissances entières).*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. On note $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

(i) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un $\theta \in]0,1[$ tel que $\Delta^n f(x) = f^{(n)}(x + n\theta)$.

Indication: Poser $g = \Delta^n f$ et utiliser le TAF

(ii) En utilisant ce résultat, montrer que si la suite définie par $u_n = n^c$ est entière pour tout n alors $c \in \mathbb{N}$.

Indication: Quelle est l'expression de la dérivée n-ème de $f : x \mapsto x^c$? En déduire que $\Delta^n f(k)$ est entier et tends vers zéro...

(iii) Quid de la réciproque ?

▪ 290 ▪

Exercice 3 *(Inégalité de Hölder).* Soit $p, q > 1$ tels que $1/p + 1/q = 1$. On note pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \tag{1}$$

(a) Pour $a, b > 0$, montrer que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Indication: Concavité du logarithme

(b) Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité suivante (Inégalité de Hölder) est vérifiée

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{2}$$

Indication: Utiliser la question précédente

(c) Montrer que

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{3}$$

Indication: Se ramener à des vecteurs de norme 1

(d) Montrer que

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{4}$$

Indication: Découper $|x + y|^p$, inégalité triangulaire puis Hölder

(e) En déduire que $\| \cdot \|_p$ est une norme pour $p \geq 1$

▪ **306** ▪

Exercice 4 *(Convexe et majorée)*. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(a) En supposant f majorée, montrer que f est constante

(b) Le résultat reste-t-il valable si le domaine de f est $\mathbb{R}^+$?

▪ **307** ▪

Exercice 5 *(Convexité et limites)*. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(a) Montrer que $\lim \frac{f(x)}{x}$ existe dans $\mathbb{R} \uplus \{+\infty\}$.

(b) Donner une fonction pour laquelle la limite est finie, et une pour laquelle la limite est infinie.

(c) En supposant que la limite précédente l est réelle. Montrer que $f(x) - lx$ possède une limite dans $\mathbb{R} \uplus \{-\infty\}$.

(d) Donner une fonction pour laquelle la limite est finie, et une pour laquelle la limite est infinie.

▪ **307** ▪

Exercice 6 *(Convexité et limites)*. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(a) Montrer que $\lim \frac{f(x)}{x}$ existe dans $\mathbb{R} \uplus \{+\infty\}$.

(b) Donner une fonction pour laquelle la limite est finie, et une pour laquelle la limite est infinie.

(c) En supposant que la limite précédente l est réelle. Montrer que $f(x) - lx$ possède une limite dans $\mathbb{R} \uplus \{-\infty\}$.

(d) Donner une fonction pour laquelle la limite est finie, et une pour laquelle la limite est infinie.