

EVN / Séries de fonctions

1 Suites de fonctions

Exercice 1 (*Critère d'équirépartition de Weil (FGN2)*).

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de $[0, 1]$. Pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$ on note

$$X_n(a, b) = |u^{-1}([a, b])| = |\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a, b]\}| \quad (1)$$

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. La suite u_n est équirépartie, ie

$$\forall 0 \leq a \leq b \leq 1, \frac{X_n(a, b)}{n} \rightarrow b - a \quad (2)$$

2. Pour toute fonction f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt \quad (3)$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k} \rightarrow 0 \quad (4)$$

Exercice 2 (*Théorème de Dini*).

Soit (f_n) une suite de fonctions *croissantes* sur $[a, b]$ telles que f_n converge simplement vers une fonction f continue.

Montrer que la convergence est uniforme.

Indication: Que dire de f ? Fixer une subdivision...

Exercice 3 (*Convergence uniforme de polynômes*).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction obtenue comme limite uniforme d'une suite P_n de polynômes.

Montrer que f est un polynôme.

2 Espaces vectoriels normés

Exercice 4 (*Égalité triangulaire*).

Soit E un espace euclidien et $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue.

On suppose que

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \int_a^b \|f(x)\| dx \quad (5)$$

Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que on ait pour tout $t \in [a, b]$ on ait $f(t) = \|f(t)\| \cdot e$.

Exercice 5 (*Séries et convergence*).

Soit E un espace vectoriel normé.

Une suite (u_n) est dite de Cauchy dans E si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq m, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon \quad (6)$$

On dit que E est complet si toute suite de Cauchy de E possède une limite dans E .

1. Montrer que E est un espace complet si et seulement si toute série de E qui converge normalement possède une limite.
2. Donner un exemple d'espace non complet (penser aux espaces de fonction).

Exercice 6 (*Comparaison de normes (465)*).

Considérons $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'(t)^2 dt} \quad (7)$$

- (a) Montrer que N est une norme sur E
- (b) Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

Indication: Que dire pour $f(x) = \sin(n\pi x)$?

Exercice 7 (*Norme sur les polynômes (473)*).

Sur $\mathbb{R}[X]$ on pose N_1 et N_2 comme suit

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(0)| \quad (8)$$

$$N_2(P) = \sup_{-1 \leq t \leq 1} |P(t)| \quad (9)$$

- (a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes
- (b) Étudier pour ces deux normes la convergence de la suite $P_n = \frac{X^n}{n}$
- (c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 8 (*Équivalence de normes (3267)*).

Soit $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E comme suit

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \quad (10)$$

$$N_2(f) = \|f + f'\|_\infty \quad (11)$$

- (a) Montrer que ce sont des normes sur E
- (b) Montrer que N_2 est dominée par N_1
- (c) Démontrer que pour $f \in E$ on a

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t)) dt \quad (12)$$

- (d) En déduire que N_1 est dominée par N_2

3 Séries de fonctions

Exercice 9 (*Étude d'une série*).

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

- Déterminer l'ensemble de définition de f
- Étudier la continuité de f
- Calculer la limite de f en $+\infty$

Indication: Convergence uniforme

- Trouver un équivalent de f en 0^+

Indication: Comparer à une intégrale

Exercice 10 (*Étude d'une série bis*).

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f
- Étudier la continuité de f
- Calculer la limite de f en $+\infty$
- Trouver un équivalent de f en 0^+

Indication: Où se trouve la masse ?

Exercice 11 (*Une série de produits*).

Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \sum_{n \geq 0} \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k}$.

- Montrer que S est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$
- Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.
- Déterminer les limites de $S(x)$ en $+\infty$ et en 0 .
- Trouver un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$ et en 0 .

Indication: Utiliser la relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$

Exercice 12 (*Approximation des solutions d'une EDO*).

On considère la suite de fonction u_n de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt \quad (13)$$

- Montrer que pour $x \in [0, 1]$ on a

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (14)$$

Indication: Procéder par induction

- En déduire la convergence simple de la suite u_n vers une fonction u .
- Montrer que la convergence est uniforme et que u n'est pas nulle
- Montrer que u est solution de l'équation différentielle $u'(x) = u(x - x^x)$.

Indication: Permutation limite intégrale

Exercice 13 (La fonction Zeta).

On note pour $s \in \mathbb{C}$ $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$.

1. Déterminer le domaine de définition de ζ
2. Prouver que ζ y est continue
3. Déterminer sa limite quand $s \rightarrow +\infty$ sur la droite réelle
4. En utilisant une comparaison série-intégrale, déduire

$$\zeta(s) \sim_{1+} \frac{1}{s-1} \quad (15)$$

Exercice 14 (Calcul de $\sum (\sin n)/n$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$ on pose

$$u_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n} \quad (16)$$

- (a) Montrer que la série des $u_n(x)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers une fonction continue.
- (b) Justifier que la fonction f ainsi définie (comme série des $u_n(x)$) est dérivable sur $] -1, 1[$.
- (c) Calculer $f'(x)$ et en déduire une expression de f

$$\text{Indication: } \arctan\left(\frac{x \sin x}{1-x \cos x}\right)$$

- (d) En déduire la valeur de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \quad (17)$$

$$\text{Indication: } \frac{\pi-1}{2}$$

Exercice 15 (Fonction zêta (907)).

On pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (18)$$

- (a) Montrer que la fonction ζ est définie et de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$.
- (b) Étudier la monotonie et la convexité de ζ
- (c) Déterminer la limite de ζ en $+\infty$
- (d) Déterminer un équivalent de ζ en 1

Indication: Comparaison série-intégrale

- (e) Établir que $\ln(\zeta(x))$ est convexe

Indication: Cauchy-Schwartz

Exercice 16 (Exponentielle complexe (919)).

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \exp(z) \quad (19)$$

Indication: Utiliser une inversion série-limite