Suites de fonctions / EVN / Séries de fonctions

1 Suites de fonctions

Exercice 1 *(Critère d'équirépartition de Weil (FGN2)).*
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $[0,1]$. Pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$ on note

$$X_n(a,b) = \left|u^{-1}([a,b])\right| = |\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a,b]\}| \tag{1}$$

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. La suite u_n est équirépartie, ie

$$\forall 0 \leq a \leq b \leq 1, \frac{X_n(a,b)}{n} \to b-a \tag{2}$$

2. Pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \to \int_0^1 f(t)dt \tag{3}$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \to 0 \tag{4}$$

Exercice 2 *(Théorème de Dini).*
Soit (f_n) une suite de fonctions *croissantes* sur $[a,b]$ telles que f_n converge simplement vers une fonction f *continue*.
Montrer que la convergence est uniforme.

Indication: Que dire de f ? Fixer une subdivision...

Exercice 3 *(Convergence uniforme de polynômes).*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction obtenue comme limite uniforme d'une suite P_n de polynômes.
Montrer que f est un polynôme.

2 Espaces vectoriels normés

Exercice 4 *(Égalité triangulaire).*
Soit E un espace euclidien et $f : [a,b] \to E$ une fonction continue.
On suppose que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \int_a^b \|f(x)\|dx \tag{5}$$

Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que on ait pour tout $t \in [a,b]$ on ait $f(t) = \|f(t)\| \cdot e$.

Exercice 5 *(Séries et convergence).*
Soit E un espace vectoriel normé.
Une suite (u_n) est dite de Cauchy dans E si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq m, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon \tag{6}$$

On dit que E est complet si toute suite de Cauchy de E possède une limite dans E.

1. Montrer que E est un espace complet si et seulement si toute série de E qui converge normalement possède une limite.
2. Donner un exemple d'espace non complet (penser aux espaces de fonction).

Exercice 6 *(Comparaison de normes (465)).*
Considérons $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et $N : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'(t)^2 dt} \tag{7}$$

(a) Montrer que N est une norme sur E

(b) Comparer N et $\|\|_\infty$.

Indication: Que dire pour $f(x) = \sin(n\pi x)$ *?*

Exercice 7 *(Norme sur les polynômes (473)).*
Sur $\mathbb{R}[X]$ on pose N_1 et N_2 comme suit

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(0)| \tag{8}$$

$$N_2(P) = \sup_{-1 \leq t \leq 1} |P(t)| \tag{9}$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes

(b) Étudier pour ces deux normes la convergence de la suite $P_n = \frac{X^n}{n}$

(c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 8 *(Équivalence de normes (3267)).*
Soit $E = \left\{ f \in C^1([0,1], \mathbb{R} \mid f(0) = 0 \right\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E comme suit

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \tag{10}$$

$$N_2(f) = \|f + f'\|_\infty \tag{11}$$

(a) Montrer que ce sont des normes sur E

(b) Montrer que N_2 est dominée par N_1

(c) Démontrer que pour $f \in E$ on a

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t))\, dt \tag{12}$$

(d) En déduire que N_1 est dominée par N_2

3 Séries de fonctions

Exercice 9 *(Étude d'une série).*
On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f

(b) Étudier la continuité de f

(c) Calculer la limite de f en $+\infty$

Indication: Convergence uniforme

(d) Trouver un équivalent de f en 0^+

Indication: Comparer à une intégrale

Exercice 10 *(Étude d'une série bis).*
On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f

(b) Étudier la continuité de f

(c) Calculer la limite de f en $+\infty$

(d) Trouver un équivalent de f en 0^+

Indication: Où se trouve la masse ?

Exercice 11 *(Une série de produits).*
Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \sum_{n\geq 0} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$.

(a) Montrer que S est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$

(b) Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.

(c) Déterminer les limites de $S(x)$ en $+\infty$ et en 0.

(d) Trouver un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$ et en 0.

Indication: Utiliser la relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$

Exercice 12 *(Approximation des solutions d'une EDO).*
On considère la suite de fonction u_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ défine par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)dt \tag{13}$$

(a) Montrer que pour $x \in [0,1]$ on a

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{14}$$

Indication: Procéder par induction

(b) En déduire la convergence simple de la suite u_n vers une fonction u.

(c) Montrer que la convergence est uniforme et que u n'est pas nulle

(d) Montrer que u est solution de l'équation différentielle $u'(x) = u(x - x^x)$.

Indication: Permutation limite intégrale

Exercice 13 *(La fonction Zeta)*.
On note pour $s \in \mathbb{C}$ $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$.

1. Déterminer le domaine de définition de ζ
2. Prouver que ζ y est continue
3. Déterminer sa limite quand $s \to +\infty$ sur la droite réelle
4. En utilisant une comparaison série-intégrale, déduire

$$\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1} \tag{15}$$