Logique

Cours de soutien n°3

Anthony Lick

17 mai 2017

Exercice 1

Soit Q l'ensemble des axiomes de l'arithmétique élémentaire.

1. Montrer que le prédicat suivant n'est pas récursif :

$$R = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ il existe } \varphi(x) \text{ telle que } n = \langle \varphi(x) \rangle \text{ et } Q \vDash \varphi(\bar{n})\}$$

2. Montrer que le prédicat suivant n'est pas récursif :

$$P = \{\langle \varphi(x) \rangle \mid \varphi(x) \text{ représente dans } Q \text{ un prédicat récursif à 1 argument}\}$$

Exercice 2

$\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2), *(2), \infty(0)\}$, $\mathcal{P} = \{=(2), \leq(2)\}$.
Soit $\mathcal{T}$ la théorie engendrée par les axiomes de l'arithmétique de Peano ainsi que les formules $s^n(0) \leq \infty$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est cohérente.
2. En déduire que l'arithmétique de Peano a des modèles non standards dénombrables.

Exercice 3

On appelle *classe de Bernays-Schönfinkel* l'ensemble de formules suivant :

$$BSC = \{\exists x_1, \dots \exists x_n, \forall y_1, \dots \forall y_m, \varphi \mid n, m \in \mathbb{N}, \text{ et } \varphi \text{ est une formule sans quantificateurs et sans symboles de fonctions } \}$$

Montrer que le problème de satisfaisabilité est décidable pour les formules de BSC.