Logique

Cours de soutien n°2

Anthony Lick

10 mai 2017

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, donner un exemple de théorie du premier ordre $\mathcal{T}$ satisfaisant les propriétés souhaitées :

1. $\mathcal{T}$ est cohérente, récursive et complète.
2. $\mathcal{T}$ est cohérente, récursive et incomplète.
3. $\mathcal{T}$ est cohérente, non récursive et complète.
4. $\mathcal{T}$ est cohérente, non récursive et incomplète.

Exercice 2 :

$\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{R(2)\}$.
On note Φ_0 l'ensemble des formules sans quantificateurs construites sur $\mathcal{F}, \mathcal{P}$.

1. Soit
$$\Phi_1 = \{\exists x_1, \ldots, \exists x_n, \forall y_1, \ldots, \forall y_m.\varphi | \varphi \in \Phi_0, fv(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}\}$$
Montrer que, si $\varphi \in \Phi_1$ est satisfaisable, alors φ a un modèle fini.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner une formule $\varphi_k \in \Phi_1$ qui est satisfaisable et qui n'a pas de modèle inférieur ou égal à k.
3. Soit φ la formule
$$\exists x, \forall y, \exists z. \neg R(y, y) \wedge \neg R(y, x) \wedge R(y, z)$$
Montrer que φ n'a pas de modèle de cardinal inférieur ou égal à 2. Donner un modèle de φ de cardinal 3.
4. Donner une formule ψ de la forme
$$\exists x, \forall y, \exists z, \forall y_1, \ldots, \forall y_m.\theta$$
où $\theta \in \Phi_0$ et $fv(\theta) \subseteq \{x, y, z, y_1, \ldots, y_m\}$ telle que ψ est satisfaisable et n'a pas de modèle fini.

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{F} = \{s(1), 0(0)\}$ et $\mathcal{P} = \{= (2)\}$. Soit $\mathcal{T}$ la théorie engendrée par les axiomes de l'égalité et :

(A_1) $\forall x, y.\ s(x) = s(y) \to x = y$
(A_2) $\forall x.\ x \neq 0 \to \exists y.\ x = s(y)$
(A_3) $\forall x.\ 0 \neq s(x)$
(A_4^n) $\forall x.\ x \neq s^n(x)$

Soit deux modèles M_1 et M_2 de $\mathcal{T}$. On note $d_i(a,b)$ la fonction définie sur le domaine D_i de M_i par : $d_i(a,b) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid a = s^n_{M_i}(b)\}$. Le minimum est $+\infty$ s'il n'y a pas de tels entiers.

1. Montrer que, pour tout i, pour tous $a, b, c \in D_i$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_i(s^k(a), a) = k$ et que, si $d_i(a,b) + d_i(b,c) < +\infty$, alors $d_i(a,b) + d_i(b,c) = d_i(a,c)$.
2. Montrer que, pour tous $a \in D_i$, $k \in \mathbb{N}$, si $d_i(a, 0_{M_i}) \geq k$, alors il existe $b \in D_i$ tel que $a = s^k_{M_i}(b)$.
3. On considère un jeu de Erhenfeucht-Fraïssé sur M_1, M_2 où les coups successifs de D et S sont donnés par les séquences $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ avec, pour tout i, $a_i \in D_1$ et $b_i \in D_2$. Montrer que, étant donné n, D a une stratégie qui permet d'assurer l'invariant $\forall i \leq n, \forall j_1, j_2 \leq i$, si $(d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) \leq 2^{n-i}$ ou $d_2(b_{j_1}, b_{j_2}) \leq 2^{n-i})$, alors $d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) = d_2(b_{j_1}, b_{j_2})$.
4. Montrer que $\mathcal{T}$ est complète.
5. Les axiomes A^n_4 sont-ils tous nécessaires ? Peut-on remplacer cet ensemble d'axiomes par un sous-ensemble fini d'axiomes en conservant la complétude ? Justifier.