Logique

Cours de soutien n°1

Anthony Lick

2 mai 2017

Exercice 1 :

$\mathcal{F} = \{e(0), ^{-1}(1), \star(2)\}$, $\mathcal{P} = \{=(2)\}$

$$\begin{array}{rcl} TG & = & \{ \ \forall x\ x \star e = x, \\ & & \quad \forall x\ e \star x = x, \\ & & \quad \forall x\ x \star x^{-1} = e, \\ & & \quad \forall x\ x^{-1} \star x = e, \\ & & \quad \forall x\ \forall y\ \forall z\ x \star (y \star z) = (x \star y) \star z \\ & & \} \ \cup \mathcal{A}_{eq} \end{array}$$

1. Est-ce que $TG \models \forall x\ \forall y\ x \star y = y \star x$?
2. Est-ce que $TG \models \neg(\forall x\ \forall y\ x \star y = y \star x)$?

Exercice 2 :

1. Soit $\varphi_1 = (\exists x, \forall y, P(x, y)) \to (\forall y, \exists x, P(x, y))$
   (a) Donner une formule prénexe équivalente à φ_1.
   (b) Donner une formule prénexe équivalente à $\neg\varphi_1$. En donner une forme skolémisée (que l'ont appelera ψ_1).
   (c) En utilisant le théorème de Herbrand sur ψ_1, montrer que φ_1 est valide.
2. Soit $\varphi_2 = (\forall x, \exists y, P(x, y)) \to (\exists y, \forall x, P(x, y))$
   (a) Donner une formule prénexe équivalente à φ_2.
   (b) Donner une formule prénexe équivalente à $\neg\varphi_2$. En donner une forme skolémisée (que l'ont appelera ψ_2).
   (c) En utilisant le théorème de Herbrand sur ψ_2, montrer que φ_1 n'est pas valide.

Exercice 3 :

$\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{R(2)\}$.
On note Φ_0 l'ensemble des formules sans quantificateurs construites sur $\mathcal{F}, \mathcal{P}$.

1. Soit
   $$\Phi_1 = \{\exists x_1, \ldots, \exists x_n, \forall y_1, \ldots, \forall y_m.\varphi | \varphi \in \Phi_0, fv(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}\}$$
   Montrer que, si $\varphi \in \Phi_1$ est satisfaisable, alors φ a un modèle fini.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner une formule $\varphi_k \in \Phi_1$ qui est satisfaisable et qui n'a pas de modèle inférieur ou égal à k.

3. Soit φ la formule
$$\exists x, \forall y, \exists z. \neg R(y,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge R(y,z)$$
Montrer que φ n'a pas de modèle de cardinal inférieur ou égal à 2. Donner un modèle de φ de cardinal 3.
4. Donner une formule ψ de la forme
$$\exists x, \forall y, \exists z, \forall y_1, \ldots, \forall y_m. \theta$$
où $\theta \in \Phi_0$ et $fv(\theta) \subseteq \{x, y, z, y_1, \ldots, y_m\}$ telle que ψ est satisfaisable et n'a pas de modèle fini.