Exercice 1 :

Montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événement on a

$$\mathrm{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(A_n)$$

où la somme de droite peut diverger.

Exercice 2 :

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$.

1. Montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements croissante pour l'inclusion, la suite des $\mathrm{P}(A_n)$ converge et
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$
2. De même, montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements décroissante pour l'inclusion, la suite des $\mathrm{P}(A_n)$ converge et
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$

Exercice 3 :

Soit $\{B_1, \ldots, B_n\}$ une partition de Ω telle que pour tout i, $\mathrm{P}(G_i) > 0$. Montrer que pour tout évènement A on a

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i)\mathrm{P}(B_i)$$

Exercice 4 :

Une urne contient n boules noires, b boules blanches et r boules rouges. On tire deux boules sans remise. Quelle est la probabilité de l'évènement "la deuxième boule tirée est noire" ?

Exercice 5 :

Soit $\{B_1, \ldots, B_n\}$ une partition de Ω telle que $\mathrm{P}(B_i) > 0$ pour tout i. Alors pour tout évènement A tel que $\mathrm{P}(A) > 0$ on a

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_i)\mathrm{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_j)\mathrm{P}(B_j)}$$

Exercice 6 :

Il existe des pièces normales (resp. biaisées) qui donnent pile avec une chance sur deux (resp. sur trois). On choisit une pièce dans un coffre, elle est biaisée avec probabilité x. On la lance et elle tombe sur face. Quelle est la probabilité qu'elle soit biaisée ?

Exercice 7 :

On considère deux dés à six faces, l'un est équilibré, l'autre est truqué. On note p_i la probabilité que le dé truqué tombe sur la face i ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

1. Décrire l'espace de probabilité.
2. (a) Quelle est la probabilité de faire un double ?
   (b) Quelle est la probabilité que la somme des dés soit égale à 7 ?

Exercice 8 :

On lance trois dés équilibrés.

1. Quelle est la somme des trois dés la plus probable ?
2. Quelle est la moyenne de S ?

Exercice 9 :

On cherche à simuler la loi uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$ avec deux dés indépendants. On note U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \dots, 6\}$. Pour tout $1 \leq i \leq 6$, on pose $u_i = PU = i$, $v_i = PV = i$ et on suppose que $u_i > 0$ et $v_i > 0$.

1. Si U et V suivent la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, 6\}$, est-ce que $U + V$ suit la loi uniforme sur $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$?
2. On note $S = U + V$ et on suppose que S suit la loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$.
   (a) Montrer que $P(x) = Ex^S$ est un polynôme qu'on explicitera.
   (b) Démontrer que $Ex^S = Ex^U \cdot Ex^V$.
   (c) Conclure en ayant en tête le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 10 :

Soit $k, n \geq 1$ des entiers naturels non nuls. Soient $X_0, X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, k]\!]$.

1. Soit $S \subset [\![1, k]\!]$. Quelle est la probabilité de $(X_i \in S)$ en fonction de $|S|$?
2. Soit $z \in [\![1, k]\!]$. Calculer $P(X_1 \neq z, \cdots, X_n \neq z)$.
3. Calculer $P(X_0 \notin \{X_1, \cdots, X_n\})$ de deux manières pour en déduire une expression de $E(|\{X_1, \dots, X_n\}|)$.
4. Déterminer la limite ou un équivalent de $E(|\{X_1, \dots, X_n\}|)$ lorsque :
   (a) k est fixé et $n \to +\infty$,
   (b) n est fixé et $k \to +\infty$,
   (c) $n = k \to +\infty$.

Exercice 11 (Penney's game) :

Alice et Bob jouent à un jeu sur une séquence de jets d'une pièce. La pièce tombe sur pile (**P**) avec probabilité p et sur face (**F**) avec probabilité $1 - p$. La pièce est relancée jusqu'à ce que l'un des motifs suivants apparaisse : Si le motif **PPF** apparait, Alice gagne. Si le motif **PFF** apparait, c'est Bob qui gagne.

1. On représente une partie par un mot sur $\{P, F\}$. Dessiner un automate déterministe complet avec deux états puits A et B tels que le langage des mots arrivant sur l'état A (resp. B) correspond aux mots représentant les parties gagnantes d'Alice (resp. Bob).
2. En déduire une description informelle de l'espace de probabilité (on cherchera à décrire les évènements élémentaires).
3. Soit $\mathcal{S}_a$ le langage représentant l'ensemble des parties gagnantes pour Alice $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_b$ le langage représentant l'ensemble des parties gagnantes pour pour Bob, $\mathcal{S}_B$ et l'ensemble des mots finis qui ne comportent pas encore de gagnant N. Justifier :
   (a) $P(\mathcal{S}_a) + P(\mathcal{S}_b) = 1$.
   (b) $\mathcal{S}_a = NPPF$ et $\mathcal{S}_a F \sqcup \mathcal{S}_B = NPFF$.
   (c) $\{\epsilon\} \sqcup N\{P, F\} = \mathcal{S}_a \sqcup \mathcal{S}_b \sqcup N$.
4. Résoudre le système obtenu en remplaçant les relations ensemblistes par des relations probabilistes.
5. Pour quelle valeur de p le jeu est-il équitable ?