Exercice 1 (Théorème de Cantor-Bernstein) :

Soit A et B deux ensembles et $f : A \to B$ et $g : B \to A$ deux injections. Soit H l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &\to \mathcal{P}(A) \\ X &\mapsto A \setminus g[B \setminus f[X]] \end{aligned}$$

1. En utilisant le théorème de Knaster-Tarski, montrer que H admet un point fixe.

Solution:
Comme l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ est un treillis complet, il suffit de montrer que H est croissante pour l'inclusion pour montrer que H a un point fixe. Soit $X \subseteq Y \subseteq A$. Alors $f[X] \subseteq f[Y]$, donc $B \setminus f[Y] \subseteq B \setminus f[X]$, donc $g[B \setminus f[Y]] \subseteq g[B \setminus f[X]]$, donc $A \setminus g[B \setminus f[X]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[Y]]$.

2. En déduire que A et B sont équipotents.

Solution:
Soit Z un point fixe de H, i.e. $Z = A \setminus g[B \setminus f[Z]]$, donc $A \setminus Z = g[B \setminus f[Z]]$. Notons que si $x \in A \setminus Z$, alors $x \in g[B]$ et a un unique antécédent ; noté $g^{-1}(x)$, par g.
Soit l'application

$$\begin{aligned} h :&A \to B \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in Z \\ g^{-1}(x) \text{ si } x \in A \setminus Z \end{cases} \end{aligned}$$

Montrons que h est injective. Soit $x, y \in A$ tels que $h(x) = h(y)$. Considérons plusieurs cas.

- Si $x, y \in Z$ alors $f(x) = f(y)$, donc $x = y$ par injectivité de f.
- Si $x, y \in A \setminus Z$ alors $g^{-1}(x) = g^{-1}(y)$ donc $x = g(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(y)) = y$.
- Si $x \in Z$ et $y \in A \setminus Z$, alors $h(x) = f(x) \in f[Z]$ et $h(y) = g^{-1}(y) \in B \setminus f[Z]$ car $A \setminus Z = g[B \setminus f[Z]]$, contradiction.

Montrons que h est surjective. Soit $y \in B$. Si $y \in f[Z]$ alors par définition de $f[\cdot]$, il existe $x \in Z$ tel que $h(x) = f(x) = y$. Si $y \in B \setminus f[Z]$ alors $g(y) \in g[B \setminus f[Z]] = A \setminus Z$, donc $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$.

3. Quels sont les plus petits et plus grands points fixes de H ? (Comparer avec la preuve du cours)

Solution:
On rappelle ici le début de la preuve du cours :
Sans perte de généralité, on suppose A et B disjoints. Pour tout $x \in A \cup B$, on définit une suite finie ou infinie comme suit :

- $x_0 := x$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si x_n est défini et dans
  - $g[B]$, alors $x_{n+1} := g^{-1}(x_n)$.
  - $f[A]$, alors $x_{n+1} := f^{-1}(x_n)$.

Soit A' (resp. B') l'ensemble des $x \in A$ (resp. $x \in B$) tels que la suite (x_n) termine dans B. (Pour tout $x \in (A \cup B) \setminus (A' \cup B')$, la suite (x_n) termine dans A ou est infini.)
A' est le plus petit point fixe de H. Le plus grand point fixe de H est

$$A' \cup \{x \in A \mid \text{ la suite } (x_n) \text{ ne termine pas}\}$$

Exercice 2 :
Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, démontrer que la continuité de Scott équivaut à la croissance et la continuité à gauche.

Solution:
Soit f une fonction Scott-continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit $y < z$. On pose $x_0 = y$ et $x_n = z$ pour $n \geq 1$. On a $\sup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = f(\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n)$, i.e. $\sup\{f(y), f(z)\} = f(z)$, donc $f(y) \leq f(z)$. f est donc croissante.
- Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) une suite dans $\mathbb{R}$ croissante qui converge vers c. On a $c = \sup\{x_n\}$, donc $f(c) = \sup\{f(x_n)\}$ par Scott-continuité. De plus, la suite $(f(x_n))$ est croissante car f et (x_n) sont croissantes. Donc $f(x_n) \to f(c)$, et f et continue à gauche en c.

Réciproquement, soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue à gauche en $c \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) une suite croissante dans $\mathbb{R}$ telle que $\sup\{x_n\} = c$. On a donc $x_n \to c$, donc $f(x_n) \to f(c)$ par continuité à gauche de f en c. De plus, comme f est croissante, $(f(x_n))$ est croissante, donc $\sup\{f(x_n)\} = f(c)$. Donc f est Scott-continue en c.

Exercice 3 :
Soit $R \in \mathcal{P}(E\times E)$. Soit t l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(E\times E) & \to & \mathcal{P}(E\times E) \\ Q & \mapsto & Q\cup R\cup Q^2 \end{cases}$$

où $Q^2 := \{(x,z) \in E\times E \mid \exists y \in E,\, xQy \wedge yQz\}$.
Montrer que t est continue au sens de Scott pour l'inclusion.

Solution:
t est croissante car $Q \mapsto Q^2$ l'est : Soit $S \subseteq Q \subseteq E\times E$ et $(x,z) \in S^2$. Par définition il existe $y \in E$ tel que $xSySz$, donc $xQyQz$, donc $(x,z) \in Q^2$.
Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante pour l'inclusion et $Q := \cup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $Q_n \subseteq Q$, donc $t(Q_n) \subseteq t(Q)$. Ainsi $\cup_{n\in\mathbb{N}} t(Q_n) \subseteq t(Q)$.
Soit $x \in t(Q)$.

- Si xQy alors il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $(x,y) \in Q_n$, donc $(x,y) \in t(Q_n) \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} t(Q_n)$.
- Si xRy alors $(x,y) \in t(Q_0) \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} t(Q_n)$
- Si xQ^2y, soit $z \in E$ tel que $xQzQy$. Il existe $n,m \in \mathbb{N}$ tels que xQ_nz et zQ_my, donc $(x,y) \in Q^2_{\max(n,m)} \subseteq t(Q_{\max(n,m)}) \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} t(Q_n)$.

Exercice 4 :
Soit k un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{N}^k$ de la relation :

$$(x_1,\dots,x_k) \leq (y_1,\dots,y_k) \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,k\}, x_i \leq y_i$$

1. Justifier que $\leq$ est un bel ordre sur $\mathbb{N}^k$.

   Solution:
   Lemme de Dickson.

2. On définit un système d'additions de vecteurs (SAV) sur $\mathbb{N}^k$ par la donnée d'un vecteur (dit marquage initial) $V_0 \in \mathbb{N}^k$ et d'un ensemble fini $\mathcal{T}$ de vecteurs dans $\mathbb{Z}^k$. Chaque

élément de $\mathcal{T}$ définit une application partielle sur $\mathbb{N}^k$ notée $\xrightarrow{t}$: $V \xrightarrow{t} V'$ si $V' = V + t$, pour tous V, V' dans $\mathbb{N}^k$ et t dans $\mathcal{T}$ (remarquez que puisque $t \in \mathbb{Z}^k$, il se peut que $V + t \notin \mathbb{N}^k$ et dans ce cas V n'a pas d'image par t). On dit qu'un vecteur V est accessible à partir de V_0 s'il existe une suite finie $t_1, ..., t_n$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telles que $V_0 \xrightarrow{t_1} V_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} V_n = V$.

(a) Soit U_1, U_2, V_1 dans $\mathbb{N}^k$ tels que $U_1 \leq U_2$ et V_1 est accessible à partir de U_1. Démontrer qu'il existe V_2 dans $\mathbb{N}^k$ accessible à partir de U_2.

Solution:
Il existe une suite finie $t_1, \ldots, t_n$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $U_1 \xrightarrow{t_1} v_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} v_n = V_1$. Alors $U_2 \xrightarrow{t_1} w_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} w_n = V_2$. Par récurrence, $v_i \leq w_i$ et la transition t_{i+1} est alors franchissable car $w_i + t_{i+1} \geq v_i + t_{i+1} \in \mathbb{N}^k$.

(b) On suppose qu'il existe U, V dans $\mathbb{N}^k$ tels que $U \leq V$ et V est accessible à partir de U. On suppose que sur la j-ème composante, $U_j < V_j$. Démontrer qu'il existe une suite croissante $U_0 = U \leq U_1 = V \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n \leq \cdots$ formée de vecteurs dans $\mathbb{N}^k$ accessibles à partir de U et tels que la suite des j-ème composantes $\{U_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Solution:
Il existe une suite de transitions franchissables à partir de U et menant à V : $t_1, \ldots, t_n$. Ainsi, $V = U + W$ avec $W = t_1 + \cdots + t_n$. D'après la question précédente, par récurrence sur m, $U_m = U + mW$ est accessible depuis U. Elle convient.

(c) On ajoute à $\mathbb{N}$ un plus grand élément noté ω : $\hat{N} = \mathbb{N} \sqcup \{\omega\}$. On étend l'addition usuelle sur $\mathbb{N}$ à $\hat{N}$ en posant $n + \omega = \omega + n = \omega$, $\forall n \in \hat{N}$ et la multiplication usuelle en posant $n\omega = \omega n = \omega$ if $n \in \hat{N} \setminus \{0\}$ et 0 sinon. Ceci permet de prolonger l'application partielle $\xrightarrow{t}$ sur $\hat{N}^k$ par : $\xrightarrow{t}$: $V \xrightarrow{t} V'$ si $V' = V + t$, pour tous V, V' dans $\hat{N}^k$.

On construit un arbre, dit *arbre de couverture*, de la façon suivante :

- La racine de l'arbre de couverture est un sommet s_0 étiqueté par le vecteur V_0.
- Si une branche de l'arbre $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$ est construite, et $t \in \mathcal{T}$ vérifie $V_n \xrightarrow{t} V_{n+1}$, on prolonge éventuellement la branche par V_{n+1} selon les règles suivantes :

R1 Si $\exists i \leq n$ tel que $V_{n+1} \leq V_i$, on ne prolonge pas la branche par V_{n+1}.

R2 Si $\exists i \leq n$ tel que $V_{n+1} \geq V_i$, on définit le vecteur $\bar{V_{n+1}} = V_i + \omega(V_{n+1} - V_i)$ (si sur la j-ème composante, $V_{n+1}(j) > V_I(j)$, on la remplace par ω). On ajoute le fils $(s, \bar{V_{n+1}})$ à $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$.

R3 Si $\forall \leq n$, V_{n+1} et V_i ne sont pas comparables, on ajoute le fils (s, V_{n+1}) à $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$.

Démontrer la terminaison de l'algorithme.

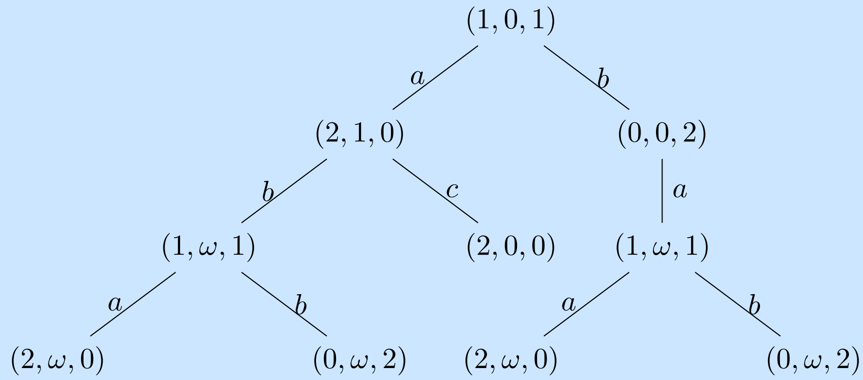
Solution:
L'arbre ainsi construit est tel qu'un sommet a au plus τ (avec $\tau = |\mathcal{T}|$) fils. Les branches sont toutes finies : en effet, si une branche est infinie $(s_0, v_0) \to \cdots \to (s_i, v_i) \to \cdots$, on aurait une suite infinie $v_{i_0} \leq v_{i_1} \leq \cdots$, or ceci ne peut se produire qu'en appliquant la règle $R2$ qui ajoute au moins un ω. Ceci ne peut se produire que k fois maximum. On démontre qu'un tel arbre est fini (lemme de Koenig : si $Succ(s_0)$ est fini, il existe par le lemme des tiroirs $s_0 \xrightarrow{t} s_1$ tel que $Succ(s_1)$ est infini... On construit ainsi par récurrence une branche infinie).

(d) Dans le cas $k = 3$, on considère le SAV défini par $V_0 = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{T} = \{a = (1, 1, -1), b = (-1, 0, 1), c = (0, -1, 0)\}$. Justifier précisément pourquoi dans ce cas l'ensemble des vecteurs accessibles à partir de V_0 est infini. Construire l'arbre de couverture dans le cas particulier.

Solution:
L'ensemble des vecteurs accessibles est infini car, par exemple :

$$V_0 \xrightarrow{a}\xrightarrow{b} (1, 1, 1) \xrightarrow{a}\xrightarrow{b} (1, 2, 1) \cdots \xrightarrow{a}\xrightarrow{b} (1, n, 1) \cdots$$

On obtient l'arbre de couverture suivant :



(e) Démontrer que l'arbre de couverture approxime l'ensemble d'accessibilité du système d'additions de vecteurs $(V_0, \mathcal{T})$ de la façon suivante :

- $\forall V$ accessible à partir de V_0, il existe un sommet de l'arbre étiqueté par un vecteur W tel que $V \leq W$.

  Solution:
  Faire une récurrence sur la longueur d'un chemin menant de V_0 à V.

- L'ensemble des vecteurs accessibles à partir de V_0 est fini si et seulement si l'arbre ne contient aucun vecteur possédant une composante ω.

  Solution:
  L'introduction d'un ω correspond à une suite d'états accessibles infinie (cf. question 2b). Réciproquement, si l'arbre est fini, l'ensemble des états accessibles est contenu dans l'ensemble des minorants d'un nombre fini de vecteurs de $\mathbb{N}^k$, donc est fini.

Exercice 5 (Théorème de Dilworth) :
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné fini.

On rappelle qu'une antichaine de E est une partie de E formée d'éléments deux à deux incomparables.

Soit F une partie non vide de E. On note $\mathrm{Max}(F)$ l'ensemble de ses éléments maximaux.

1. Si F une partie non vide de E, justifier que $\mathrm{Max}(F)$ est une partie non vide de E.

Solution:
Par récurrence sur le cardinal de F. On prend $x \in F$. S'il n'est pas maximal, on applique la récurrence à $\{z \in F \mid z > x\}$.

2. Si F une partie non vide de E, justifier que $\text{Max}(F)$ est une antichaine et qu'elle est maximale (au sens de l'inclusion) parmi les antichaines de F.

Solution:
Par récurrence sur le cardinal de F. Si F est le singleton $\{x\}$, $x \in Max(F)$ et $\{x\}$ est maximale. Sinon, deux éléments distincts de $Max(F)$ son incomparables, donc $Max(F)$ est une antichaine. De plus, un élément de F est majoré par un élément maximal (cf. 1) donc il n'existe aucun élément de $F \setminus Max(F)$ non comparable à tous les éléments de $Max(F)$, ce qui assure que l'antichaine $Max(F)$ est maximale.

On se propose de démontrer par récurrence sur $|E|$ le **théorème de Dilworth** :
Soit k le maximum des cardinaux des antichaines dans E. Alors E est la réunion disjointe de k chaines.

3. Démontrer le résultat lorsque $k = 1$.

Solution:
Lorsque $k = 1$, deux éléments distincts de E sont incomparables, donc l'ordre est total. Un ensemble fini totalement ordonné est une chaine.

4. On suppose que $k > 1$. Soit $z \in \text{Max}(E)$ et $F = E \setminus \{z\}$. Soit l le maximum des cardinaux des antichaines dans F ; on suppose que F est la réunion disjointe de chaines $C_1, ..., C_l$.

   (a) Donner un encadrement de k en fonction de l.

   Solution:
   Une antichaine de F est une antichaine de E donc $l \leq k$. Une antichaine de E est soit une antichaine de F, soit la réunion d'une antichaine de F avec $\{z\}$. Donc $k \leq l + 1$.

   (b) Soit $\mathcal{C}$ une antichaine de E. Que peut-on dire de $\mathcal{C} \cap C_i$, pour i dans $[\![1, l]\!]$?

   Solution:
   L'ensemble $\mathcal{C} \cap C_i$ est au plus de cardinal 1. En effet, $\mathcal{C} \cap C_i$ est à la fois une chaine et une antichaine, ce qui n'est possible que pour l'ensemble vide ou un singleton.

   (c) Soit i dans $[\![1, l]\!]$. On note D_i l'ensemble des éléments de C_i qui sont dans une antichaine de cardinal l dans F.

      i. Justifier que D_i est non vide.

      Solution:
      Soit $\mathcal{C}$ une antichaine de cardinal l. Comme $l = |\mathcal{C}| = \sum_i |\mathcal{C} \cap C_i|$, et que les ensembles $\mathcal{C} \cap C_i$ sont au plus de cardinal 1, ils faut qu'ils soit tous de cardinal 1.

      On note dans la suite y_i un élément maximal de D_i.

      ii. Démontrer que $\{y_1, ..., y_l\}$ est une antichaine de F.

      Solution:
      Supposons qu'il existe $i \neq j$ tels que $y_i \leq y_j$. Soit $\mathcal{C}$ une antichaine de cardinal l contenant y_j. Soit $x \in \mathcal{C} \cap C_i$ (un tel x existe sinon $|\mathcal{C}| = \sum_i |\mathcal{C} \cap C_i| \leq l - 1$). Alors par maximalité de y_i dans la chaine C_i, $x \leq y_i$ et donc $x \leq y_j$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{C}$ est une antichaine.

iii. On suppose que pour tout i, z n'est pas comparable à y_i. Conclure.

Solution:
On décompose $E = \cup_{i=1}^{l} E_i \cup \{z\}$ et ainsi, E est la réunion disjointe de k-chaines.

iv. On suppose qu'il existe i tel que z est comparable avec y_i. Soit $C' = \{z\} \cup \{x \in C_i \mid x \leq y_i\}$. Démontrer que C' est une chaine et que $F \setminus C'$ ne contient pas d'antichaine de cardinal l. Conclure dans ce cas.

Solution:
Comme z est comparable avec y_i et $z \in Max(E)$, $y_i \leq z$. Donc par transitivité, $C' = \{z\} \cup \{x \in C_i \mid x \leq y_i\}$ est une chaine.
Si $F \setminus C'$ contient une antichaine de cardinal l, alors celle-ci rencontre non trivialement C_i en x. Dans la chaine C_i, x et y_i sont comparables et comme $x \notin C'$, $x \geq y_i$. Par maximalité de y_i dans D_i, $x = y_i$, ce qui contredit $x \notin C'$.

5. Soit N un entier naturel non nul.

(a) Soit $\mathcal{F} = \{n_i, i \in [\![1, N]\!]\}$ une suite d'entiers naturels. On munit $\mathcal{F}$ de la relation :

$$n_i \preceq n_j \text{ si } \begin{cases} i \leq j \\ n_i \leq n_j \end{cases}$$

Démontrer que $\preceq$ est une relation d'ordre partiel. Décrire pour $\preceq$ les chaines et les antichaines.

Solution:
Le fait que $\preceq$ et une relation d'ordre partiel se vérifie facilement.
Les chaines sont les suites croissantes $n_{i_1} \leq n_{i_2} \leq \cdots \leq n_{i_k}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.
Les antichaines sont les suites strictement décroissantes $n_{i_1} > n_{i_2} > \cdots > n_{i_k}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

(b) Soit m et n deux entiers naturels tels que $N - 1 = nm$. Démontrer que $\mathcal{F}$ contient une suite croissante de cardinal $n + 1$ ou une suite décroissante de cardinal $m + 1$.

Solution:
On applique alors le théorème de Dilworth : soit k le maximum des cardinaux des antichaines dans $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ est la réunion disjointe de k chaines.
Si $k \geq m+1$, alors $\mathcal{F}$ a une antichaine de cardinal $m+1$ donc une suite strictement décroissante de cardinal $m + 1$. Sinon, $k \leq m$ et $\mathcal{F}$ est la réunion disjointe de k chaines. Si ces chaines sont toutes de cardinal $\leq n$, alors $\mathcal{F}$ est de cardinal au plus $kn \leq mn$.

6. Soit N un entier naturel non nul. Soit $\mathcal{I}$ une famille de N intervalles fermés réels. Soit m et n deux entiers naturels tels que $N - 1 = nm$. Démontrer qu'il existe $m + 1$ intervalles dans $\mathcal{I}$ disjoints deux à deux ou $n + 1$ intervalles dans $\mathcal{I}$ d'intersection non vide.

Solution:
On munit $\mathcal{I}$ d'une relation d'ordre partiel $\preceq$ en posant :

$$[a, b] \prec [c, d] \text{ si } b < c$$

Les chaines sont les suites d'intervalles $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$ avec $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < b_{k-1} < a_k < b_k$. Les antichaines sont les suites d'intervalles $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$ telles que $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j]$ soit vide pour tous i, j. S'il n'existe pas $m+1$ intervalles dans $\mathcal{I}$ disjoints deux à deux, les chaines sont toutes de cardinal $\leq m$. En utilisant le théorème de Dilworth, $\mathcal{I}$ est de cardinal $\leq mk$ où k est le maximum des cardinaux des antichaines dans $\mathcal{I}$. Donc $k > n$. Soit alors $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$ une antichaine de cardinal k. On pose $a = \max(a_1, \ldots, a_k) = a_j$ et $b = \max(b_1, \ldots, b_k) = b_l$. Alors pour tout i, $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j]$ est non vide, donc $a_i < a < b_i$ (en particulier $a < b$), et $[a_i, b_i] \cap [a_l, b_l]$ est non vide, donc $a_i < b < b_i$. Donc $[a, b]$ est un intervalle non vide contenu dans tous les $[a_i, b_i]$.