Relations d'ordre.

Exercice 1 :

Montrer au moins 4 des cas suivants :

Soit $(R_i)_{i\in I}$ une famille de relations binaires sur un ensemble E. Soit $R = \cap_{i\in I} R_i$. Autrement dit, xRy ssi xR_iy pour tout $i \in I$.

- Si une des R_i est irréflexive / asymétrique / antisymétrique, alors R l'est aussi.
- Si toutes les R_i sont réflexives / symétriques / transitives, alors R l'est aussi.
- l'intersection ne préserve ni la totalité ni la trichotomie.

Solution:

- Supposons que R_{i_0} est irréflexive. Alors pour tout $x \in E$, si xRx alors $xR_{i_0}x$, absurde.
  Supposons que R_{i_0} est asymétrique. Soit $x, y \in E$ tels que xRy. Alors $xR_{i_0}y$, donc $\neg(yR_{i_0}x)$, donc $\neg(yRx)$.
  Supposons que R_{i_0} est antisymétrique. Soit $x, y \in E$ tels que xRy et yRx. Alors $xR_{i_0}y$ et $yR_{i_0}y$, donc $x = y$.
- Supposons que toutes les R_i sont réflexives. Alors xR_ix pour tout $i \in I$, donc xRx.
  Supposons que toutes les R_i sont symétriques. Soit $x, y \in E$ tels que xRy. Alors xR_iy pour tout $i \in I$, donc yR_ix pour tout $i \in I$, donc yRx.
  Supposons que toutes les R_i sont transitives. Soit $x, y, z \in E$ tels que $xRyRz$. Alors xR_iyR_iz pour tout $i \in I$, donc xR_iz pour tout $i \in I$, donc xRz.
- Soit $E := \{0, 1\}$. Sur E, soit $R_0 := (0, 1)$ et $R_1 := \{(1, 0)\}$ deux relations trichotomiques. L'intersection $R_0 \cap R_1 = \emptyset$ n'est pas trichotomique.
  Soit $R'_i := R_i \cup \{(0, 0), (1, 1)\}$ pour tout $i \in \{0, 1\}$. Ces deux relations sont totales, mais $R'_0 \cap R'_1$ est la relation d'égalité et n'est donc pas totale.

Exercice 2 :

Montrer au moins 2 des cas suivants :

Soit R une relation sur un ensemble E, et $F \subseteq E$. Si R est réflexive / symétrique / transitive / totale / antisymétrique / irréflexive / asymétrique / trichotomique, alors R_F l'est aussi.

Solution:

Cela s'écrit facilement car tous les quantificateurs sont universels.

Exercice 3 :

Montrer au moins 2 des cas suivants :

Si R est réflexive / symétrique / transitive / totale / antisymétrique / irréflexive / asymétrique / trichotomique, alors R^{-1} aussi.

Solution:

Cela s'écrit facilement car tous les quantificateurs commutent.

Exercice 4 :

Montrer les propositions suivantes :

- Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné fini et $x \in E$. Il existe un élément maximal y dans E tel que $x \leq y$.
- Si toute partie finie d'un ensemble ordonné admet un plus grand élément, alors c'est un ordre total.

Solution:

- Par récurrence sur le cardinal de E. Si $|E| = 1$, alors l'unique élément de E est maximal. Soit $(E, \leq)$ de cardinal $n+1$ et $x \in E$. Supposons que x n'est pas maximal (sinon il n'y a rien à faire). Donc $F := \{y \in E \setminus \{x\} \mid x \leq y\}$ est non vide. De plus, $(F, \leq_F)$ est ordonné et $|F| < |E|$ car $x \notin F$, donc F a un élément maximal y par hypothèse de récurrence.
  Soit $z \in E$ tel que $y \leq z$. Si $z = x$ alors $y = x$ par antisymétrie, contradiction, donc $z \neq x$. De plus $x \leq z$ par transitivité, donc $z \in F$, donc $z = y$ par maximalité de y dans F. Cela prouve que y est maximal dans E.
- Pour tout $x, y \in E$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$ car $\{x, y\}$ a un plus grand élément.

Exercice 5 :
Montrer que le produit lexicographique d'ordres (totaux) est un ordre (total).

Solution:

- Réflexivité : par définition.
- Antisymétrie : supposons $x \leq_{\text{lex}} y$ et $y \leq_{\text{lex}} x$ et $x \neq y$. Soit $k := \min\{j \in I \mid x_j \neq y_j\}$, alors $x_k \leq_k y_k$ et $y_k \leq_k x_k$, donc $x_k = y_k$, contradiction.
- Totalité (si les ordres sont totaux) : supposons $x \neq y$. Soit $k := \min\{j \in I \mid x_j \neq y_j\}$, alors $x_k \leq_k y_k$ ou $y_k \leq_k x_k$, donc $x \leq_{\text{lex}} y$ ou $y \leq_{\text{lex}} x$.
- Transitivité : soit $x, y, z \in E$ tels que $x \leq_{\text{lex}} y \leq_{\text{lex}} z$. Si $x = y$ ou $y = z$ ou $x = z$, alors $x \leq_{\text{lex}} z$. Supposons donc que x, y et z sont deux-à-deux distincts. Soit $k := \min\{j \in I \mid x_j \neq y_j\}$ et $l := \min\{j \in I \mid y_j \neq z_j\}$. Considérons trois cas.
  - Si $k = l$, alors $x_k \leq_k y_k \leq_k z_k$ et $x_k \neq z_k$. Donc, d'une part $x_k \leq_k z_k$, et d'autre part $k = \min\{j \in I \mid x_j \neq z_j\}$, d'où $x \leq_{\text{lex}} z$.
  - Si $k < l$, alors $k = \min\{j \in I \mid x_j \neq z_j\}$ et $z_k = y_k$, donc $x_k \leq_k z_k$, i.e. $x \leq_{\text{lex}} z$.
  - Si $l < k$, alors $l = \min\{j \in I \mid x_j \neq z_j\}$ et $x_l = y_l$, donc $x_l \leq_l z_l$, i.e. $x \leq_{\text{lex}} z$.

Exercice 6 :
Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel notée $\preccurlyeq$. On dit que la relation $\preccurlyeq$ est un bel ordre si de toute suite d'éléments de E, on peut extraire une suite infinie croissante, i.e. $\forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, il existe une suite strictement croissante d'indices $i_0 < i_1 < \cdots < i_n < \cdots$ telle que la suite $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : $x_{i_0} \preccurlyeq x_{i_1} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_{i_n} \preccurlyeq \cdots$.

1. Dans le cas particulier où l'ordre $\preccurlyeq$ est total, démontrer que $\preccurlyeq$ est un bel ordre si et seulement si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

   Solution:
   Par l'absurde : une partie non vide de E qui n'admet pas de plus petit élément permet par récurrence de construire une suite infinie strictement décroissante dont on en peut pas extraire de suite croissante. Réciproquement, on extrait d'une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante par récurrence en posant : $x_{i_0} = \min\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et, pour $n > 0$, $x_{i_n} = \min\{x_i \mid i \in \mathbb{N} \ ; \ i > i_{n-1}\}$.

2. Donner un exemple d'un ensemble ordonné dans lequel l'ordre n'est pas un bel ordre.

   Solution:
   $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$.

3. Démontrer l'équivalence des assertions :

(*def1*) L'ordre $\preccurlyeq$ sur l'ensemble E est un bel ordre.

(*def2*) De toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une paire croissante, i.e. $i < j$ tels que $x_i \preccurlyeq x_j$.

(*def3*) (i) Il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante dans E,

(ii) Il n'y a pas d'antichaine infinie.

Solution:
(*def1*) $\Rightarrow$ (*def2*) : trivial.
(*def2*) $\Rightarrow$ (*def3*) : en effet, la propriété (*def2*) se conserve par restriction à toute partie infinie de E.
(*def3*) $\Rightarrow$ (*def1*) : On colorie l'ensemble $F = \{(x_i, x_j), i < j\}$ de la façon suivante :

- (x_i, x_j) est colorié en rouge si $x_i \preccurlyeq x_j$,
- (x_i, x_j) est colorié en vert si $x_j \preccurlyeq x_i$ et $x_i \neq x_j$,
- (x_i, x_j) est colorié en bleu si x_i et x_j sont incomparables.

Le théorème de Ramsey assure qu'il existe une partie infinie $I \subset \mathbb{N}$ et une couleur c telle que : $\forall i, j \in I, i < j, (x_i, x_j)$ est colorié par la couleur c. Si c est le couleur bleue, $(x_i)_{i\in I}$ est une antichaine infinie : impossible. Si c est de couleur verte, $(x_i)_{i\in I}$ est une suite strictement décroissante : impossible. Donc c est la couleur rouge, et $(x_i)_{i\in I}$ est une suite croissante.

4. Soit E un ensemble dénombrable muni d'un ordre $\preccurlyeq$ pour lequel il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante (un tel ordre est dit *bien fondé*). Démontrer que $\preccurlyeq$ est un bel ordre si set seulement si l'ensemble des antichaines est dénombrable.

Solution:
Si $\preccurlyeq$ est un bel ordre, toute antichaine est finie. Donc l'ensemble des antichaines est contenue dans l'ensemble des parties finies de E, union dénombrable d'ensembles dénombrables (en partitionnant selon les cardinaux), donc dénombrable. Si $\preccurlyeq$ n'est pas un bel ordre, il existe une antichaine infinie (cf. (*def3*)). Tout sous-ensemble de cette antichaine infinie est une antichaine, donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'injecte dans l'ensemble des antichaines, qui est donc non dénombrable.

5. Lemme de Dickson : Soit $\preccurlyeq_1$ un bel ordre sur un ensemble E_1 et $\preccurlyeq_2$ un bel ordre sur un ensemble E_2. Montrer que $(\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2)$ est un bel ordre sur le produit direct $E_1 \times E_2$.

Solution:
Soit $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite. Comme $\preccurlyeq_1$ est un bel ordre, il existe une partie infinie $I_1 \subset \mathbb{N}$ telle que la suite $\{x_i\}_{i\in I_1}$ soit croissante. Comme $\preccurlyeq_2$ est un bel ordre, il existe une partie infinie $I_2 \subset I_1$ telle que la suite $\{y_i\}_{i\in I_2}$ soit croissante. La suite $\{(x_i, y_i)\}_{i\in I_2}$ est alors croissante.

6. Lemme de Higman : Soit $\preccurlyeq$ un bel ordre sur un ensemble Σ. On définit une relation sur Σ^* en posant :

$$a_1...a_m \leq_{sm} b_1b_2...b_n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n \\ a_1 \preccurlyeq b_{i_1} \wedge a_2 \preccurlyeq b_{i_2} \cdots a_m \preccurlyeq b_{i_m} \end{cases}$$

(a) Démontrer que $\leq_{sm}$ est une relation d'ordre (sm pour sous-mot).

Solution:
Évident.

(b) Démontrer que $\leq_{sm}$ est un bel ordre.

Solution:
On utilise (*def2*).
Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall i < j, u_i \not\leq u_j$. Si $\mathcal{U}$ est non vide, soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{U}$ minimale au sens suivant :

- u_0 est de longueur minimale parmi toutes les suites dans $\mathcal{U}$,
- u_1 est de longueur minimale parmi toutes les suites de $\mathcal{U}$ qui commencent par u_0, ...
- u_i est de longueur minimale parmi toutes les suites de $\mathcal{U}$ qui commencent par $u_0, \ldots, u_{i-1}$.

On décompose chaque u_i sous la forme $a_i v_i$ avec $a_i \in \Sigma$. On peut trouver une suite infinie croissante $(a_i)_{i\in I}$. Alors la suite $(v_i)_{i\in I} \in \mathcal{U}$ (si $i < j$, $a_i \leq a_j$et $u_i = a_i v_i \neq u_j = a_j v_j$). Posons $m = \min I$ et considérons la suite $(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$ suivie de $v_i, i \in I$. Alors pour $i < m$ et $j \in I$, $u_i \not\leq u_j$ puisque $v_j \leq u_j$ et $u_i \not\leq u_j$. Donc cette suite est dans $\mathcal{U}$, ce qui contredit la minimalité de u.

7. Soit $\leq$ un bel ordre sur E. Soit F une partie de E telle que : $\forall y \in E$, s'il existe $x \in F$ tel que $x \preccurlyeq y$, alors $y \in F$ (on dit que F est *fermée supérieurement*).

(a) Démontrer que toute suite croissante de parties fermées supérieurement est stationnaire.

Solution:
Soit $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots$ une suite croissante de parties fermées supérieurement. Si la suite n'est pas stationnaire, on peut la supposer strictement croissante. Soit alors $x_n \in F_n \setminus F_{n-1}$. Alors, pour $m < n$, $x_m \leq x_n$ implique $x_n \in F_m \subset F_{n-1}$ ce qui est faux, on a donc une contradiction.

(b) Démontrer que si F est une partie fermée supérieurement, il existe un nombre fini d'éléments $x_1, ..., x_n$ dans F tels que $F = \cup_i \{y \in E, x_i \preccurlyeq y\}$.

Solution:
On considère les éléments minimaux dans F. Ils forment une antichaine, donc ils sont en nombre fini.

Exercice 7 :
Soit k un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{N}^k$ de la relation :

$$(x_1, ..., x_k) \leq (y_1, ..., y_k) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., k\}, x_i \leq y_i$$

1. Justifier que $\leq$ est un bel ordre sur $\mathbb{N}^k$.

Solution:
Lemme de Dickson.

2. On définit un système d'additions de vecteurs (SAV) sur $\mathbb{N}^k$ par la donnée d'un vecteur (dit marquage initial) $V_0 \in \mathbb{N}^k$ et d'un ensemble fini $\mathcal{T}$ de vecteurs dans $\mathbb{Z}^k$. Chaque élément de $\mathcal{T}$ définit une application partielle sur $\mathbb{N}^k$ notée $\xrightarrow{t} : V \xrightarrow{t} V'$ si $V' = V + t$,

pour tous V, V' dans $\mathbb{N}^k$ et t dans $\mathcal{T}$ (remarquez que puisque $t \in \mathbb{Z}^k$, il se peut que $V + t \notin \mathbb{N}^k$ et dans ce cas V n'a pas d'image par t). On dit qu'un vecteur V est accessible à partir de V_0 s'il existe une suite finie $t_1, ..., t_n$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telles que $V_0 \xrightarrow{t_1} V_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} V_n = V$.

(a) Soit U_1, U_2, V_1 dans $\mathbb{N}^k$ tels que $U_1 \leq U_2$ et V_1 est accessible à partir de U_1. Démontrer qu'il existe V_2 dans $\mathbb{N}^k$ accessible à partir de U_2.

Solution:
Il existe une suite finie $t_1, \ldots, t_n$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $U_1 \xrightarrow{t_1} v_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} v_n = V_1$. Alors $U_2 \xrightarrow{t_1} w_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} w_n = V_2$. Par récurrence, $v_i \leq w_i$ et la transition t_{i+1} est alors franchissable car $w_i + t_{i+1} \geq v_i + t_{i+1} \in \mathbb{N}^k$.

(b) On suppose qu'il existe U, V dans $\mathbb{N}^k$ tels que $U \leq V$ et V est accessible à partir de U. On suppose que sur la j-ème composante, $U_j < V_j$. Démontrer qu'il existe une suite croissante $U_0 = U \leq U_1 = V \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n \leq \cdots$ formée de vecteurs dans $\mathbb{N}^k$ accessibles à partir de U et tels que la suite des j-ème composantes $\{U_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Solution:
Il existe une suite de transitions franchissables à partir de U et menant à V : $t_1, \ldots, t_n$. Ainsi, $V = U + W$ avec $W = t_1 + \cdots + t_n$. D'après la question précédente, par récurrence sur m, $U_m = U + mW$ est accessible depuis U. Elle convient.

(c) On ajoute à $\mathbb{N}$ un plus grand élément noté ω : $\hat{N} = \mathbb{N} \sqcup \{\omega\}$. On étend l'addition usuelle sur $\mathbb{N}$ à $\hat{N}$ en posant $n + \omega = \omega + n = \omega$, $\forall n \in \hat{N}$ et la multiplication usuelle en posant $n\omega = \omega n = \omega$ if $n \in \hat{N} \setminus \{0\}$ et 0 sinon. Ceci permet de prolonger l'application partielle $\xrightarrow{t}$ sur $\hat{N}^k$ par : $\xrightarrow{t} : V \xrightarrow{t} V'$ si $V' = V + t$, pour tous V, V' dans $\hat{N}^k$.

On construit un arbre, dit *arbre de couverture*, de la façon suivante :

- La racine de l'arbre de couverture est un sommet s_0 étiqueté par le vecteur V_0.
- Si une branche de l'arbre $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$ est construite, et $t \in \mathcal{T}$ vérifie $V_n \xrightarrow{t} V_{n+1}$, on prolonge éventuellement la branche par V_{n+1} selon les règles suivantes :

R1 Si $\exists i \leq n$ tel que $V_{n+1} \leq V_i$, on ne prolonge pas la branche par V_{n+1}.

R2 Si $\exists i \leq n$ tel que $V_{n+1} \geq V_i$, on définit le vecteur $\bar{V}_{n+1} = V_i + \omega(V_{n+1} - V_i)$ (si sur la j-ème composante, $V_{n+1}(j) > V_I(j)$, on la remplace par ω). On ajoute le fils $(s, \bar{V}_{n+1})$ à $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$.

R3 Si $\forall \leq n$, V_{n+1} et V_i ne sont pas comparables, on ajoute le fils (s, V_{n+1}) à $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$.

Démontrer la terminaison de l'algorithme.

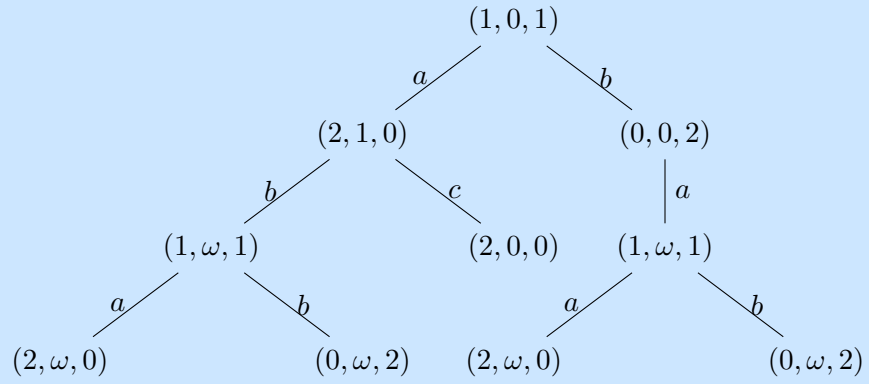
Solution:
L'arbre ainsi construit est tel qu'un sommet a au plus τ (avec $\tau = |\mathcal{T}|$) fils. Les branches sont toutes finies : en effet, si une branche est infinie $(s_0, v_0) \to \cdots \to (s_i, v_i) \to \cdots$, on aurait une suite infinie $v_{i_0} \leq v_{i_1} \leq \cdots$, or ceci ne peut se produire qu'en appliquant la règle $R2$ qui ajoute au moins un ω. Ceci ne peut se produire que k fois maximum. On démontre qu'un tel arbre est fini (lemme de Koenig : si $Succ(s_0)$ est fini, il existe par le lemme des tiroirs $s_0 \xrightarrow{t} s_1$ tel que $Succ(s_1)$ est infini... On construit ainsi par récurrence une branche infinie).

(d) Dans le cas $k = 3$, on considère le SAV défini par $V_0 = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{T} = \{a = (1, 1, -1), b = (-1, 0, 1), c = (0, -1, 0)\}$. Justifier précisément pourquoi dans ce cas l'ensemble des vecteurs accessibles à partir de V_0 est infini. Construire l'arbre de couverture dans le cas particulier.

Solution:
L'ensemble des vecteurs accessibles est infini car, par exemple :

$$V_0 \xrightarrow{a}\xrightarrow{b} (1, 1, 1) \xrightarrow{a}\xrightarrow{b} (1, 2, 1) \cdots \xrightarrow{a}\xrightarrow{b} (1, n, 1) \cdots$$

On obtient l'arbre de couverture suivant :



(e) Démontrer que l'arbre de couverture approxime l'ensemble d'accessibilité du système d'additions de vecteurs $(V_0, \mathcal{T})$ de la façon suivante :

- $\forall V$ accessible à partir de V_0, il existe un sommet de l'arbre étiqueté par un vecteur W tel que $V \leq W$.

  Solution:
  Faire une récurrence sur la longueur d'un chemin menant de V_0 à V.

- L'ensemble des vecteurs accessibles à partir de V_0 est fini si et seulement si l'arbre ne contient aucun vecteur possédant une composante ω.

  Solution:
  L'introduction d'un ω correspond à une suite d'états accessibles infinie (cf. question 2b). Réciproquement, si l'arbre est fini, l'ensemble des états accessibles est contenu dans l'ensemble des minorants d'un nombre fini de vecteurs de $\mathbb{N}^k$, donc est fini.

Exercice 8 (Théorème de Dilworth) :
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné fini.
On rappelle qu'une antichaine de E est une partie de E formée d'éléments deux à deux incomparables.
Soit F une partie non vide de E. On note $\mathrm{Max}(F)$ l'ensemble de ses éléments maximaux.

1. Si F une partie non vide de E, justifier que $\mathrm{Max}(F)$ est une partie non vide de E.

   Solution:
   Par récurrence sur le cardinal de F. On prend $x \in F$. S'il n'est pas maximal, on applique la récurrence à $\{z \in F \mid z > x\}$.

2. Si F une partie non vide de E, justifier que $\mathrm{Max}(F)$ est une antichaine et qu'elle est maximale (au sens de l'inclusion) parmi les antichaines de E.

Solution:
Par récurrence sur le cardinal de F. Si F est le singleton $\{x\}$, $x \in Max(F)$ et $\{x\}$ est maximale. Sinon, deux éléments distincts de $Max(F)$ son incomparables, donc $Max(F)$ est une antichaine. De plus, un élément de F est majoré par un élément maximal (cf. 1) donc il n'existe aucun élément de $F \setminus Max(F)$ non comparable à tous les éléments de $Max(F)$, ce qui assure que l'antichaine $Max(F)$ est maximale.

On se propose de démontrer par récurrence sur $|E|$ le **théorème de Dilworth** :
Soit k le maximum des cardinaux des antichaines dans E. Alors E est la réunion disjointe de k chaines.

3. Démontrer le résultat lorsque $k = 1$.

Solution:
Lorsque $k = 1$, deux éléments distincts de E sont incomparables, donc l'ordre est total. Un ensemble fini totalement ordonné est une chaine.

4. On suppose que $k > 1$. Soit $z \in \mathrm{Max}(E)$ et $F = E \setminus \{z\}$. Soit l le maximum des cardinaux des antichaines dans F ; on suppose que F est la réunion disjointe de chaines $C_1, ..., C_l$.

   (a) Donner un encadrement de k en fonction de l.

   Solution:
   Une antichaine de F est une antichaine de E donc $l \leq k$. Une antichaine de E est soit une antichaine de F, soit la réunion d'une antichaine de F avec $\{z\}$. Donc $k \leq l + 1$.

   (b) Soit $\mathcal{C}$ une antichaine de E. Que peut-on dire de $\mathcal{C} \cap C_i$, pour i dans $[\![1, l]\!]$?

   Solution:
   L'ensemble $\mathcal{C} \cap C_i$ est au plus de cardinal 1. En effet, $\mathcal{C} \cap C_i$ est à la fois une chaine et une antichaine, ce qui n'est possible que pour l'ensemble vide ou un singleton.

   (c) Soit i dans $[\![1, l]\!]$. On note D_i l'ensemble des éléments de C_i qui sont dans une antichaine de cardinal l dans F.

      i. Justifier que D_i est non vide.

      Solution:
      Soit $\mathcal{C}$ une antichaine de cardinal l. Comme $l = |\mathcal{C}| = \sum_i |\mathcal{C} \cap C_i|$, et que les ensembles $\mathcal{C} \cap C_i$ sont au plus de cardinal 1, ils faut qu'ils soit tous de cardinal 1.

      On note dans la suite y_i un élément maximal de D_i.

      ii. Démontrer que $\{y_1, ..., y_l\}$ est une antichaine de F.

      Solution:
      Supposons qu'il existe $i \neq j$ tels que $y_i \leq y_j$. Soit $\mathcal{C}$ une antichaine de cardinal l contenant y_j. Soit $x \in \mathcal{C} \cap C_i$ (un tel x existe sinon $|\mathcal{C}| = \sum_i |\mathcal{C} \cap C_i| \leq l - 1$). Alors par maximalité de y_i dans la chaine C_i, $x \leq y_i$ et donc $x \leq y_j$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{C}$ est une antichaine.

iii. On suppose que pour tout i, z n'est pas comparable à y_i. Conclure.

Solution:
On décompose $E = \cup_{i=1}^{l} E_i \cup \{z\}$ et ainsi, E est la réunion disjointe de k-chaines.

iv. On suppose qu'il existe i tel que z est comparable avec y_i. Soit $C' = \{z\} \cup \{x \in C_i \mid x \leq y_i\}$. Démontrer que C' est une chaine et que $F \setminus C'$ ne contient pas d'antichaine de cardinal l. Conclure dans ce cas.

Solution:
Comme z est comparable avec y_i et $z \in Max(E)$, $y_i \leq z$. Donc par transitivité, $C' = \{z\} \cup \{x \in C_i \mid x \leq y_i\}$ est une chaine.
Si $F \setminus C'$ contient une antichaine de cardinal l, alors celle-ci rencontre non trivialement C_i en x. Dans la chaine C_i, x et y_i sont comparables et comme $x \notin C'$, $x \geq y_i$. Par maximalité de y_i dans D_i, $x = y_i$, ce qui contredit $x \notin C'$.

5. Soit N un entier naturel non nul.
   (a) Soit $\mathcal{F} = \{n_i, i \in [\![1, N]\!]\}$ une suite d'entiers naturels. On munit $\mathcal{F}$ de la relation :

$$n_i \preceq n_j \text{ si } \begin{cases} i \leq j \\ n_i \leq n_j \end{cases}$$

   Démontrer que $\preceq$ est une relation d'ordre partiel. Décrire pour $\preceq$ les chaines et les antichaines.

   Solution:
   Le fait que $\preceq$ et une relation d'ordre partiel se vérifie facilement.
   Les chaines sont les suites croissantes $n_{i_1} \leq n_{i_2} \leq \cdots \leq n_{i_k}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.
   Les antichaines sont les suites strictement décroissantes $n_{i_1} > n_{i_2} > \cdots > n_{i_k}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

   (b) Soit m et n deux entiers naturels tels que $N - 1 = nm$. Démontrer que $\mathcal{F}$ contient une suite croissante de cardinal $n + 1$ ou une suite décroissante de cardinal $m + 1$.

   Solution:
   On applique alors le théorème de Dilworth : soit k le maximum des cardinaux des antichaines dans $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ est la réunion disjointe de k chaines.
   Si $k \geq m+1$, alors $\mathcal{F}$ a une antichaine de cardinal $m+1$ donc une suite strictement décroissante de cardinal $m + 1$. Sinon, $k \leq m$ et $\mathcal{F}$ est la réunion disjointe de k chaines. Si ces chaines sont toutes de cardinal $\leq n$, alors $\mathcal{F}$ est de cardinal au plus $kn \leq mn$.

6. Soit N un entier naturel non nul. Soit $\mathcal{I}$ une famille de N intervalles fermés réels. Soit m et n deux entiers naturels tels que $N - 1 = nm$. Démontrer qu'il existe $m + 1$ intervalles dans $\mathcal{I}$ disjoints deux à deux ou $n + 1$ intervalles dans $\mathcal{I}$ d'intersection non vide.

   Solution:
   On munit $\mathcal{I}$ d'une relation d'ordre partiel $\preceq$ en posant :

$$[a, b] \prec [c, d] \text{ si } b < c$$

Les chaines sont les suites d'intervalles $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$ avec $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < b_{k-1} < a_k < b_k$. Les antichaines sont les suites d'intervalles $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$ telles que $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j]$ soit vide pour tous i, j. S'il n'existe pas $m+1$ intervalles dans $\mathcal{I}$ disjoints deux à deux, les chaines sont toutes de cardinal $\leq m$. En utilisant le théorème de Dilworth, $\mathcal{I}$ est de cardinal $\leq mk$ où k est le maximum des cardinaux des antichaines dans $\mathcal{I}$. Donc $k > n$. Soit alors $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$ une antichaine de cardinal k. On pose $a = \max(a_1, \ldots, a_k) = a_j$ et $b = \max(b_1, \ldots, b_k) = b_l$. Alors pour tout i, $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j]$ est non vide, donc $a_i < a < b_i$ (en particulier $a < b$), et $[a_i, b_i] \cap [a_l, b_l]$ est non vide, donc $a_i < b < b_i$. Donc $[a, b]$ est un intervalle non vide contenu dans tous les $[a_i, b_i]$.