Relations d'équivalence.

Exercice 1 :
Peut-on se passer d'une des trois propriétés requises pour définir les relations d'équivalence ?

Solution:
Non (exhiber des contre-exemples). On pourrait néanmoins se passer de la réflexivité s'il n'y a pas de point isolé.

Exercice 2 :
Soit f une bijection involutive (i.e. $fof = Id$) sur un ensemble fini E.

1. Démontrer que le cardinal de l'ensemble des points fixes de E est de la même parité que le cardinal de E.

Solution:
On introduit la relation $\mathcal{R}$ sur E : $x \,\mathcal{R}\, y \iff x = y$ ou $x = f(y)$. C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont :

- $\{x\}$ pour x point fixe de f.
- $\{x, f(x)\}$, de cardinal 2, si x n'est pas un point fixe de f.

Comme E est la réunion disjointe des classes d'équivalence,

$$|E| = \sum_{\omega \in E/\mathcal{R}} |w| \equiv \sum_{\substack{\omega \in E/\mathcal{R} \\ |w| = 1}} 1 \ [2] \equiv |\{\text{points fixes de } f\}| \ [2]$$

2. En déduire que si E est de cardinal impair, f admet (au moins) un point fixe.

Solution:
Si f n'a pas de point fixe, ses classes sont de cardinal 2, donc E est de cardinal pair.

3. Une application : Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Démontrer que le nombre de racines réelles de P (comptées avec leur multiplicités) est de même parité que le degré de P.

Solution:
Faire agir la conjugaison complexe sur la famille des racines de P.

Exercice 3 :
Une relation est donnée par un tableau T à doubles entrées et de taille (N, N). $T[i, j] = 1$ si $i \,\mathcal{R}\, j$, $T[i, j] = 0$, sinon. Comment vérifier sur le tableau s'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Solution:

- réflexive : lire la diagonale
- symétrie : symétrie par rapport à la diagonale
- transitive : il faut vérifier la relation de circularité : pour i de 1 à $n-1$, pour j de $i+1$ à n, pour k de 1 à n, $T[i, j] = 1$ et $T[j, k] = 1 \Rightarrow T[i, k] = 1$.

Exercice 4 :

Définir le corps des rationnels comme l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\sim$ définie sur $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}))$ par :

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow mq = np$$

Solution:

Il faut d'abord vérifier que c'est bien une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive) ; puis, en notant $\frac{p}{q}$ la classe d'équivalence de (p, q), définir la somme et le produit et vérifier leur compatibilité avec la relation d'équivalence.

Exercice 5 :

Soit E un ensemble infini de $\mathbb{N}^2$. Il existe soit une droite soit une fonction strictement croissante et strictement convexe ou concave passant par un nombre infini de points de E.

Solution:

Étudions dans un premier temps le cas $E \subseteq [\![0, k]\!] \times \mathbb{N}$ pour un $k \in \mathbb{N}$. Comme E est infini, il existe $i \in [\![0, k]\!]$ tel que $E \cap (\{i\} \times \mathbb{N})$ est infini. (On note que $\{i\} \times \mathbb{N}$ est une droite.)

De même, si $E \subseteq \mathbb{N} \times [\![0, k]\!]$ pour un $k \in \mathbb{N}$, une droite horizontale contient une partie infinie de E.

Considérons maintenant le cas où $\neg(E \subseteq ([\![0, k]\!] \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times [\![0, k]\!]))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc il existe une suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E telle que $x_n < x_{n+1}$ et $y_n < y_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $F := \{(x_n, y_n) | n \in \mathbb{N}\}$, et soit

$$\begin{aligned} f : &\mathcal{P}_3(F) \to \{-1, 0, 1\} \\ &\{(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)\} \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si les trois points sont alignés} \\ 1 \text{ si } \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} < \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j} \\ -1 \text{ si } \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} > \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j} \end{cases} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Ramsey, il existe Y une partie infinie de F et $c \in \{-1, 0, 1\}$ telle que $f[Y] = \{c\}$.

- Si $c = 0$, alors il existe une droite contenant Y.
- Si $c = 1$, alors $\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} < \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j}$ pour tout $\{(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)\} \in Y$. La fonction dont le graphe est l'union des segments de droite $[(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})]$ est donc strictement croissante et convexe (et peut être modifiée en une fonction strictement convexe).
- idem.

Exercice 6 (Équivalence de Nérode) :

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, i_o, F)$ un automate déterministe complet, où Q représente l'ensemble des états, Σ l'alphabet, δ la fonction de transitions, i_o l'état initial et F l'ensemble des états finals.

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur Q telle que :

- Pour tous états p et q de $\mathcal{A}$ tels que $p \sim q$, pour tout a dans Σ, $\delta(p, a) \sim \delta(q, a)$.
- Si $p \in F$, pour tout état q de $\mathcal{A}$ tel que $p \sim q$, q est dans F.

Pour tout état p, on note $C(p)$ sa classe d'équivalence.

1. (a) Démontrer qu'on définit un automate déterministe complet en posant : $\mathcal{A}_\sim = (Q/\sim, \Sigma, \delta_\sim, C(i_o), F/\sim)$ où $Q/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\sim$, $\delta_\sim(C, a) = C(\delta(p, a))$ (on justifiera que cela a un sens), $F/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de F.

   Solution:
   Soit C une classe d'équivalence. Si $p, q \in C$, $p \sim q$ donc pour tout $a \in \Sigma$, $\delta(p, a) \sim \delta(q, a)$. On peut donc définir $\delta_\sim(C, a) = \delta(p, a)$ indépendant du choix de $p \in C$. Le reste se vérifie facilement.

   (b) Démontrer que $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_\sim)$.

   Solution:
   Soit $i_0 \xrightarrow{a_0} i_1 \xrightarrow{a_1} i_2 \cdots \xrightarrow{a_n} f$ un chemin dans $\mathcal{A}$. Alors, $C(i_0) \xrightarrow{a_0} C(i_1) \xrightarrow{a_1} C(i_2) \cdots \xrightarrow{a_n} C(f)$ est un chemin dans $\mathcal{A}_\sim$.
   Réciproquement, par définition de $\mathcal{A}_\sim$, tout chemin dans $\mathcal{A}_\sim$ se relève en un chemin de $\mathcal{A}$. De plus, le chemin $i_0 \xrightarrow{a_0} i_1 \xrightarrow{a_1} i_2 \cdots \xrightarrow{a_n} f$ est acceptant si et seulement si $f \in F$, ce qui équivaut à $C(f) \in F_\sim$, ce qui équivaut au fait que le chemin $C(i_0) \xrightarrow{a_0} C(i_1) \xrightarrow{a_1} C(i_2) \cdots \xrightarrow{a_n} C(f)$ est acceptant.

2. On définit alors pour tout entier n la relation d'équivalence sur Q : Pour tous états p et q de $\mathcal{A}$, $p \sim_n q$ si, pour tout mot de longueur $w \leq n$, $\delta(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta(q, w) \in F$. Justifier :

   (a) Pour tous états p et q de $\mathcal{A}$, $p \sim_{n+1} q \Rightarrow p \sim_n q$.

   Solution:
   Évident car un mot de longueur $\leq n$ est un mot de longueur $\leq n + 1$.

   (b) Il existe n tel que $\sim_{n+1} = \sim_n$.

   Solution:
   Notons $C_n(p)$ la classe d'équivalence de l'état p pour la relation $\sim_n$. Alors la suite $C_n(p)$ est décroissante pour l'inclusion. Elle est donc stationnaire (Q est fini). Donc il existe n tel que, $\forall p \in Q, \forall m \geq n$, $C_m(p) = C_{m+1}(p)$. Pour un tel n, $\sim_{n+1} = \sim_n$.

3. En déduire un algorithme de calcul de l'automate minimal de $\mathcal{A}$.

   Solution:
   Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur Q telle que : $p \sim q$ si les langages reconnus par les automates $\mathcal{A}_p = (Q, \Sigma, \delta, p, F)$ et $\mathcal{A}_q = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ sont égaux. Cette condition s'écrit aussi :
   $$\forall w \in \Sigma^*, \delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F$$
   Avec les notations précédentes, on a $\sim = \sim_n$.
   L'algorithme de calcul de $\mathcal{A}_\sim$ se fait donc selon le plan :

   - On distingue les éléments de F de ceux de $Q \setminus F$.
   - Si deux états q_1 et q_2 sont marqués différemment, alors pour tout $a \in \Sigma$, et pour tous p_1 et p_2 tels que $\delta(p_1, a) = q_1$ et $\delta(p_2, a) = q_2$, p_1 et p_2 doivent être marqués différemment. Cette procédure est faite récursivement, jusqu'à devenir fixe.

Relations d'ordre.

Exercice 7 :
Montrer que :

1. Toute relation asymétrique est irréflexive et antisymétrique.

   Solution:
   Si xRx alors $\neg(xRx)$, donc $\neg(xRx)$. Si xRy et yRx, c'est absurde, donc $x = y$.

2. Tout ordre strict est asymétrique.

   Solution:
   Si xRy et yRx alors xRx par transitivité, ce qui contredit l'irréflexivité.

3. Toute relation trichotomique est asymétrique.

   Solution:
   Si xRy et yRx, cela contredit directement la trichotomie.

4. Tout ordre total strict est un ordre strict.

   Solution:
   En combinant les lemmes ci-dessus.

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, i.e. $\leq$ est un ordre sur E.

- $x \in E$ est le **plus grand élément** de E si $\forall y \in E, y \leq x$.
- $x \in E$ est un **élément maximal** de E si $\forall y \in E$, $x \leq y \Rightarrow x = y$.
- Les **éléments minimaux** et le **plus petit élément** sont définis de manière analogue.

Soit $F \subseteq E$.

- $x \in E$ est un **majorant** de F si $\forall y \in F,\ y \leq x$.
- $x \in E$ est un **minorant** de F si $\forall y \in F,\ x \leq y$.

Exercice 8 :
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
Quel est l'ensemble des majorants de $\emptyset$? Quel est l'ensemble des minorants de $\emptyset$?

Solution:
Tout élément de E majore et minore l'ensemble vide : E dans les deux cas.

Exercice 9 :

1. On considère l'ensemble des nombres dont l'écriture en base 2 comporte exactement n chiffres. Décrire précisément en utilisant cette écriture la relation `Successeur`.

   Solution:
   Un nombre n s'écrit $n_1 n_2 \cdots n_p$, avec $n_1 = 1$, $n_i \in \{0, 1\}$ pour $i \geq 2$ et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (sauf pour n=0).

   - Si, pour tout i, $n_i = 1$, on a : $\texttt{succ}(n) = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{p}$
   - Sinon, on détermine i tel que $\forall j > i,\ n_j = 1$ et $n_i = 0$. Le successeur de n est alors : $n_1 n_2 \cdots n_{i-1} 1 \underbrace{0 \cdots 0}_{p-i}$

2. Même question en base 10.

Solution:
Un nombre n s'écrit $n_1 n_2 \cdots n_p$, avec $n_1 \neq 0$, $n_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ pour $i \leq 2$ et $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (sauf pour $n = 0$).

- Si, pour tout i, $n_i = 9$, on a : $\texttt{succ}(n) = 1\underbrace{0\ldots0}_{p}$
- Sinon, on détermine i tel que $\forall j > i,\ n_j = 9$ et $n_i < 9$. Le successeur de n est alors : $n_1 n_2 \cdots n_{i-1}(n_i + 1)\underbrace{0\cdots0}_{p-i}$

3. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\{1, ..., n\}$ sur lui-même. On rappelle que $\mathcal{S}_n$ est de cardinal $n!$.
Une bijection f de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ sur lui-même est codée par un nombre à n chiffres en base n : $f(1)f(2)\cdots f(n)$.
L'ordre lexicographique définit ainsi un ordre total sur $\mathcal{S}_n$.

(a) Traiter les cas $n = 2$ et $n = 3$ exhaustivement.

Solution:
Pour $n = 2$, $12 < 21$.
Pour $n = 3$, $123 < 132 < 213 < 231 < 312 < 321$.

(b) Quel est le plus petit élément de $\mathcal{S}_n$?

Solution:
Le plut petit élément est $12\cdots n$ qui correspond à l'identité.

(c) Quel est le plus grand élément de $\mathcal{S}_n$?

Solution:
Le plus grand élément est $n(n-1)(n-2)\cdots 1$ qui correspond à $(i \mapsto n + 1 - i)$.

(d) Donner un algorithme qui à partir de la représentation d'une bijection calcule son numéro.

Solution:
Soit $m_1 \cdots m_n$ la représentation d'une bijection f. Il y a $(m_1 - 1)(n - 1)!$ bijections g telles que $g(1) < m_1$. Parmi celles telles que $g(1) = m_1$, $g < f$ si $g(2)g(3)\cdots g(n) < f(2)f(3)\cdots f(n)$. Donc on est ramené au même problème sur l'ensemble $[\![1, n]\!] \setminus \{m_1\}$. Cela permet de définir de façon récursive :

$$\texttt{numero}(m_1 m_2 \cdots m_n, [\![1, n]\!]) = (m_1 - 1)(n - 1)! + \texttt{numero}(m_2 \cdots m_n, [\![1, n]\!] \setminus \{m_1\})$$

On l'initialise en posant $\texttt{numero}(m, \{m\}) = 1$.

(e) Décrire précisément la relation `Successeur`.

Solution:
Analyse du problème : Soit $f \in \mathcal{S}_n$, et soit $g = \texttt{succ}(f)$. Soit k tel que $\forall i < k,\ f(i) = g(i)$ et $f(k) \neq g(k)$. Soit $I = \{f(1), \ldots, f(k-1)\}$.

- $\texttt{succ}(f(k)\cdots f(n)) = g(k)\cdots g(n)$ dans $\mathcal{S}(I^c)$. Donc $f(k+1) > f(k+2) > \cdots > f(n)$ et $f(k) < f(k+1)$.

- $g(k)$ est le successeur de $f(k)$ dans I^c.
- $g(k+1) < \cdots < g(n)$.

Comme ceci définit un unique élément, on obtient un algorithme de calcul du successeur :

- On parcourt $f(n), f(n-1), f(i)$ tant que la suite est croissante.
- Soit k l'indice où on stop : ainsi, $f(k+1) > f(k+2) > \cdots > f(n)$ et $f(k) < f(k+1)$. On calcule le successeur m de $f(k)$ dans l'ensemble $\{f(k), \cdots, f(n)\}$.
- On ordonne les éléments de $\{f(k), \cdots, f(n)\} \setminus \{m\}$: $m_1 < m_2 < \cdots < m_{n-k}$.

Le successeur de f est alors $f(1) \cdots f(k-1) m m_1 \cdots m_{n-k}$.

Exercice 10 :

Soit E un ensemble muni d'un ordre partiel $\leq$. On rappelle qu'une *antichaine* est un sous-ensemble de E dans lequel tous les éléments sont incomparables.

1. On considère $\mathbb{N}^2$ muni de l'ordre produit.
   (a) Exhiber des antichaines de cardinal n, pour tout entier $n > 1$.

   Solution:
   $(0, n), (1, n-1), \cdots, (n, 0)$ est une antichaine de cardinal $n+1$.

   (b) Peut-on trouver une antichaine infinie ?

   Solution:
   Non. Soit $(U_i = (x_i, y_i))_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs tous distincts dans $\mathbb{N}^2$.
   - Si l'ensemble $\{xi, i \in \mathbb{N}\}$ est fini, alors par le lemme des tiroirs il existe $i < j$ tels que $x_i = x_j$ et les vecteurs U_i et U_j sont alors comparables.
   - Sinon, on a une suite strictement croissante infinie sur la première composante et il n'est pas possible que la suite correspondante sur la seconde composante soit strictement décroissante.

2. Dans Σ^* muni de la relation d'ordre `être facteur de`, exhiber une antichaine infinie.

   Solution:
   Prenons $\Sigma = \{a, b\}$ de cardinal 2. Alors la famille $ab^n a,\ n \geq 1$ convient.

Dans ce paragraphe, E est l'ensemble des parties d'un ensemble fini X de cardinal n ($E = \mathcal{P}(X)$).

3. On suppose $n > 1$. Démontrer que la suite des coefficients binomiaux est ordonnée ainsi :
$$1 < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > 1$$

   Solution:
   $\binom{n}{k} = \frac{n-(k-1)}{k} \binom{n}{k-1}$ et $\frac{n-(k-1)}{k} < 1 \iff k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

4. Exhiber des antichaines de cardinal $\binom{n}{k}$, pour tout $k \in \{1, ..., \frac{n}{2}\}$.

Solution:
L'ensemble des parties de cardinal k forme une antichaine de cardinal $\binom{n}{k}$.

5. Soit A une antichaine dans E. Pour k dans $[\![0, n]\!]$, on note a_k le nombre d'éléments de cardinal k dans A. On se propose de démontrer l'inégalité de Lubell-Yamamoto-Meshalkin :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

   (a) Démontrer qu'il y a exactement $n!$ chaines strictement croissantes dans E, de la forme $X_0 = \emptyset \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$.

   Solution:
   La chaine $X_0 = \emptyset \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$ étant strictement croissante, chaque X_i est de cardinal i. Il y a n choix pour l'unique élément x_1 de X_1, puis par récurrence $n-i+1$ choix pour l'unique élément de $X_i \setminus X_{i-1}$. Soit $n!$ en tout.

   (b) Soit S une partie de X de cardinal s. Démontrer qu'il existe exactement $s!(n-s)!$ chaines strictement croissantes dans E, de la forme $X_0 = \emptyset \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$, telles que $X_s = S$.

   Solution:
   Une telle sous-chaine strictement décroissante est totalement déterminée par : $X_0 = \emptyset \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_s = S$, sous-chaine strictement croissante de S, et $Y_0 = X_s \setminus X_s = \emptyset \subsetneq Y_1 = X_{s+1} \setminus X_s \subsetneq \cdots \subsetneq Y_{n-s} = X \setminus X_s = S^c$, sous-chaine strictement croissante de S^c.

   Il y a $s!$ choix pour la première sous-chaine et $(n-s)!$ choix pour la deuxième, donc $s!(n-s)!$ en tout.

   (c) Soit $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r$ une chaine strictement croissante dans E. Alors il y a au plus un X_i dans A. En partitionnant l'ensemble des chaines strictement croissantes $X_0 = \emptyset \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$, selon leur éventuelle intersection avec A, démontrer l'inégalité de Lubell-Yamamoto-Meshalkin.

   Solution:
   Pour S dans A, on note SCM_S l'ensemble des sous-chaines strictement croissantes $X_0 = \emptyset \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$ telles qu'il existe i tel que $X_i = S$. C'est un ensemble de cardinal $|S|!(n-|S|)!$ d'après la question précédente.

   Si une sous-chaine strictement croissante $X_0 = \emptyset \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$ est telle qu'il existe un i tel que $X_i \in A$, alors un tel i est unique puisque les éléments de A sont deux à deux incomparables ; donc les ensembles SCM_S sont disjoints deux à deux, lorsque S parcourt A.

   Ainsi : $\sum_{S\in A}(|S|!(n-|S|)!) \leq n!$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} = \sum_{S\in A} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \sum_{S\in A} \frac{|S|!(n-|S|)!}{n!} = \frac{1}{n} \sum_{S\in A} |S|!(n-|S|)! \leq 1$$

6. En déduire le cardinal maximal d'une antichaine dans $E = \mathcal{P}(X)$.

Solution:
Soit A une antichaine. Avec les notations précédentes,

$$|A| \leq \binom{n}{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq \binom{n}{\frac{n}{2}}$$

De plus, l'ensemble des parties de cardinal $\frac{n}{2}$ est une antichaine de cardinal $\binom{n}{\frac{n}{2}}$, donc le maximum est exactement $\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

Exercice 11 :

On munit $\{0, 1\}$ de l'ordre lexicographique.

Soit $\mathcal{MF}_n$ l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathcal{P}(\{1, ..., n\})$ dans $\{0, 1\}$. On appelle n-ième nombre de Dedekind et on note D_n son cardinal.

1. Établir une bijection entre $\mathcal{MF}_n$ et l'ensemble des antichaines de $\mathcal{P}(\{1, ..., n\})$.

Solution:
On associe à une fonction f croissante de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$ l'ensemble des parties maximales de $\{X \mid X \subset [\![1, n]\!],\ f(X) = 0\}$.

2. Calculer D_1, D_2 et D_3.

Solution:
Il faut compter l'antichaine $\emptyset$. Donc $D_1 = 2$ et $D_2 = 1+4+1 = 6$, en ayant partitionné les antichaines selon leur nombre d'éléments.

Pour D_3 ça demande un peu de travail : dessiner d'abord le diagramme de Hasse. Partitionner les antichaines selon leur réunion (seule le cas $\{1, 2, 3\}$ est non trivial) puis le nombre d'éléments. On trouve $D_3 = 20$.