Exercice 0 :

1. Soit E et F deux ensembles dénombrables. Démontrer que $E \cup F$ est dénombrable.

Solution:
Soit f (resp. g) une injection de E (resp. F) dans $\mathbb{N}$. La fonction suivante est injective :

$$\begin{array}{rl} E \cup F & \mapsto \mathbb{N} \\ x & \to \begin{cases} 2f(x) & \text{si } x \in E \\ 2g(x)+1 & \text{si } x \in F \setminus E \end{cases} \end{array}$$

2. Soit $E_1, \dots, E_n$ des ensembles dénombrables. Démontrer que $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est dénombrable.

Solution:
Soit f_i l'injection de E_i dans $\mathbb{N}$. La fonction f suivante est injective :

$$\begin{array}{rl} \prod_{i=1}^{n} E_i & \mapsto \mathbb{N}^n \\ x & \to (f_i(x))_{1 \leq i \leq n} \end{array}$$

Et $\mathbb{N}^n$ est dénombrable.

Raisonnement combinatoire

Exercice 1 :
Démontrer par des arguments combinatoires l'identité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$$

Solution:
On compte le nombre de parties à trois éléments dans un ensemble contenant $3n$ éléments, dont n sont coloriés en rouge, n sont coloriés en bleu et n sont coloriés en vert.

On distingue alors les cas : les trois éléments sont de la même couleur, deux éléments sont de la même couleur et le troisième d'une couleur différente, et les trois éléments sont de couleurs différentes.

Des applications du lemme des tiroirs

Exercice 2 :
On a coloré des arcs sur un cercle de diamètre 1. La somme des longueurs des arcs colorés est $< \pi/2$. Démontrer qu'il existe un diamètre du cercle dont les deux extrémités ne sont pas colorées.

Solution:
On colore aussi les arcs symétriques des arcs colorés sur le cercle. La longueur des arcs colorés est alors 2 fois la longueur initialement colorée, donc $< \pi$. Le diamètre d'extrémité un point non coloré convient.

Exercice 3 :
Soit $n+1$ nombres $m_1, ..., m_{n+1}$ choisis parmi les nombres entiers naturels $1, 2, ..., 2n$.
Montrer qu'il existe i, j, $1 \leq i \neq j \leq n+1$ tels que m_i divise m_j.

Solution:
On décompose chaque entier m_i sous la forme $2^{k_i} q_i$, avec q_i un entier impair compris entre 1 et $2n-1$. Il y a n entiers impairs entre 1 et $2n$, donc par le principe des tiroirs, il existe $i \neq j$ tels que $q_i = q_j$. Alors m_i divise m_j ou m_i est un multiple de m_j.

Dénombrabilité (ou non).

Exercice 4 :
Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Solution:
C'est une union dénombrable d'ensembles finis (réunion croissante des $\mathcal{P}(\{0, \ldots, n\})$).

Exercice 5 :
Montrer que l'ensemble des nombres décimaux est dénombrable.

Solution:
C'est une union dénombrable d'ensembles finis (partitionner selon la partie entière, puis le nombre de décimales).

Exercice 6 :
Soit Σ un alphabet fini.

1. Démontrer que l'ensemble des arbres finis sur Σ est dénombrable.

   Solution:
   C'est une union dénombrable d'ensembles finis (partitionner selon la taille des arbres).

2. Démontrer que Σ^∞ n'est pas dénombrable (sauf si Σ est un singleton).

   Solution:
   Argument diagonal : Par l'absurde, Soit a, b deux lettres différentes dans Σ. Si on a énuméré les mots w_i, $i \in \mathbb{N}$, avec $w_i = (w_i(j))_{j \in \mathbb{N}}$, le mot v défini par $v(i) = a$, si $w_i(i) = b$, $v(i) = b$ sinon, n'est pas dans l'énumération.

Exercice 7 :
Démontrer que l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Solution:
Argument diagonal : Par l'absurde, si on a énuméré les suites à valeurs dans $\{0, 1\}$: U_i, $i \in \mathbb{N}$, avec $U_i = (U_i(j))j \in \mathbb{N}$, alors la suite V définie par $V(i) = 1 - U_i(i)$, pour tout entier naturel i, n'est pas dans l'énumération.

Exercice 8 :
Donner un exemple d'une famille non dénombrable de parties de $\mathbb{N}$ dont les intersections 2 à 2 sont finies.

Solution:
D'après l'exercice précédent, l'ensemble des suites à valeurs dans $\{1,2\}$ n'est pas dénombrable. À une telle suite $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on associe l'ensemble $I_u = \{u_n u_{n-1} \cdots u_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($u_n u_{n-1} \cdots u_0$ désigne l'entier naturel dont l'écriture en base 10 est $u_n u_{n-1} \cdots u_0$).
Alors la famille I_u, u parcourant l'ensemble des suites à valeurs dans $\{1,2\}$ convient.

Exercice 9 :
En utilisant le théorème de Cantor Bernstein, démontrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

Solution:
Par double inclusion. On inclut $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ en envoyant la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur le nombre réel :

$$0,0\underbrace{1\cdots1}_{u_0}0\underbrace{1\cdots1}_{u_1}0\underbrace{1\cdots1}_{u_2}0\cdots$$

On inclut $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ en envoyant le nombre réel x de développement décimal $sg(x)(\lfloor|x|\rfloor, x_1x_2x_3\cdots)$ sur la suite :

$$(sg(x)+1, \lfloor|x|\rfloor, x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

Exercice 10 (L'arbre de Stern-Brocot) :
On cherche à représenter les nombres rationnels strictement positifs en les introduisant sous la forme d'un arbre de façon récursive.
On part de deux motifs 0/1 (qui représente 0) et 1/0 (qui représente l'infini).
A chaque étape, on insère entre deux fractions consécutives m/n et m'/n' la fraction $(m+m')/(n+n')$.
Ainsi, on on obtient après quatre étapes :

1) initialisation : $[\frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$
2) $[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}]$
3) $[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}]$
4) $[\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}]$
5) $[\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{1}{0}]$

1. Vérifier que pour $m/n < m'/n'$, on a $m/n < (m+m')/(n+n') < m'/n'$.

   Solution:
   $(m+m')/(n+n') - m/n = (m'n - mn')/n(n+n') = n'(m'/n' - m/n)/(n+n') > 0$ et un calcul similaire pour l'autre inégalité.

2. Démontrer que à chaque étape pour deux fractions consécutives $m/n < m'/n'$, on a $n'm - m'n = \pm 1$.

   Solution:
   Par récurrence : C'est vrai à la première étape et $n(m+m') - (n+n')m = (nm' - mn')$ et $n'(m+m') - (n+n')m' = (n'm - m'n)$.

3. En déduire que les fractions construites par ce procédé sont sous forme irréductible (i.e. le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux).

Solution:
On obtient ainsi une relation de Bezout entre le numérateur et le dénominateur, ils sont donc premiers entre eux.

4. Soit p/q un rationnel strictement positif représenté par une fraction irréductible. On suppose que $\frac{m}{n} < \frac{p}{q} < \frac{m'}{n'}$. Démontrer que $m + m' + n + n' \leq p + q$.

Solution:
On a : $pn - qm \geq 1$ et $m'q - n'p \geq 1$ (entiers > 0). Donc

$$\begin{aligned} m + m' + n + n' &\leq (m+n)(m'q - n'p) + (m'+n')(pn - qm) \\ &= p(n(m'+n') - n'(m+n)) + q(m'(m+n) - m(m'+n')) \\ &= p\underbrace{(nm' - n'm)}_{1} + q\underbrace{(m'n - mn')}_{1} \\ &= p + q \end{aligned}$$

5. Soit p/q un rationnel strictement positif représenté par une fraction irréductible. Démontrer qu'elle apparait de façon unique dans la construction.

Solution:
On fait une récurrence sur $p + q$.
Si $p + q = 2$, $p = 1$ et $q = 1$ et $1/1$ est apparu à la première étape.
Au début, $\frac{0}{1} < \frac{p}{q} < \frac{1}{0}$. On raffine petit à petit cet encadrement.
Si $\frac{m}{n} < \frac{p}{q} < \frac{m'}{n'}$, alors il y a trois possibilités :

- $\frac{m}{n} < \frac{p}{q} < \frac{m+m'}{n+n'}$, mais alors $m+m'+n+n' < m+m+m'+n+n+n' \leq p+q$.
- $\frac{m+m'}{n+n'} < \frac{p}{q} < \frac{m'}{n'}$, mais alors $m+m'+n+n' < m+m'+m'+n+n'+n' \leq p+q$.
- Sinon, $\frac{m+m'}{n+n'} = \frac{p}{q}$.

La suite des encadrements stricts produit une suite strictement croissante $\leq p + q$, donc le processus s'arrête sur un cas d'égalité.
De plus, ceci ne peut se produire qu'une seule fois car la suite produite à chaque étape est strictement croissante.

6. En déduire que $\mathbb{Q}^{*+}$ est dénombrable.

Solution:
On obtient ainsi $\mathbb{Q}^{*+}$ comme une réunion sur $\mathbb{N}$ d'ensembles finis.

Exercice 11 :
Une autre méthode pour démontrer que $[0, 1]$ est non dénombrable.
Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels dans $[0, 1]$.

1. Construire par récurrence une suite d'intervalles fermés I_n de mesure > 0 tels que :
   - $I_0 \subset [0, 1]$,
   - $I_n \subset I_{n-1}$,
   - I_n est un intervalle fermé de mesure > 0 qui ne contient pas x_n.

Solution:
On construit la suite d'intervalles par récurrence de la façon suivante :

- $I_{-1} = [0,1]$.
- Pour $n \geq 0$ avec $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$,

$$I_n = \begin{cases} I_{n-1} & \text{si } x_n \notin I_{n-1} \\ [\frac{x_n+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}] & \text{si } x_n \in [a_{n-1}, b_{n-1}[\\ [a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}] & \text{si } x_n = b_{n-1} \end{cases}$$

2. En déduire que $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

Solution:
On a ainsi construit une suite d'intervalles emboités. Par le théorème des segments emboités, $\cap_n I_n$ est un fermé non vide dans $[0,1]$. Par construction, $\cap_n I_n$ ne contient aucun des éléments de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Il n'est donc pas possible d'énumérer $[0,1]$.

Exercice 12 (Ensemble de Cantor) :
Soit $I = [a,b]$ un intervalle de mesure $\delta = b - a$. On définit $\rho(I) = [a, a + \frac{\delta}{3}] \cup [b - \frac{\delta}{3}, b]$. L'application ρ découpe l'intervalle I en trois intervalles fermés de mesures égales et retire celui du milieu. On étend ρ aux réunions finies d'intervalles fermés disjoints en faisant agir ρ sur chacun des intervalles.

On définit l'ensemble de Cantor comme $C = \cap_n F_n$, où F_n est défini par récurrence sur n comme :

$$F_0 = [0,1] \text{ et } F_n = \rho(F_{n-1})$$

1. Démontrer que C est un fermé non vide de mesure nulle.

Solution:
Chaque F_n est par construction un fermé contenu dans F_{n-1}. Par le théorème des fermés emboités, C est un fermé non vide. De plus, par construction, on a $\mu(F_n) = \frac{2}{3}\mu(F_{n-1})$, donc $\mu(C) \leq (\frac{2}{3})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc par passage à la limite, $\mu(C) = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que F_n est la réunion de 2^n intervalles $\cup_{i=1}^{2^n}[a_i, b_i]$, la suite $a_0, a_1, \ldots, a_{2^n}$ représente la suite ordonnée des éléments de la forme $\frac{\sum_{i=1}^n x_i 3^i}{3^n}$, avec $x_i \in \{0,2\}$ (éléments de $[0,1]$ dont le développement en base 3 a au plus n chiffres et ne comporte que des 0 et des 2) et $b_i = a_i + \frac{1}{3^n}$.

Solution:
On le démontre par récurrence sur n.
C'est vrai pour $F_0 = [0,1]$ en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1 = a_0 + \frac{1}{3^0}$.
Supposons que $F_n = \sqcup_{i=1}^{2^n}[a_i, b_i]$ avec $a_0, a_1, \ldots, a_{2^n}$ une suite ordonnée des éléments de la forme $\frac{\sum_{j=1}^n x_j 3^j}{3^n}$ et $b_i = a_i + \frac{1}{3^n}$, pour tout i. Alors $F_{n+1} = \rho(F_n) = \sqcup_{i=1}^{2^n}\rho([a_i, b_i])$.
Par définition, $\rho([a_i, b_i]) = [a_i, a_i + \frac{1}{3^{n+1}}] \cup [b_i - \frac{1}{3^{n+1}}, b_i]$.
Posons $c_{2i} = a_i$, $d_{2i} = a_i + \frac{1}{3^{n+1}}$, $c_{2i+1} = b_i - \frac{1}{3^{n+1}}$, $d_{2i+1} = b_i$, de façon à avoir $F_{n+1} = [c_{2i}, d_{2i}] \cup [c_{2i+1}, d_{2i+1}]$ avec $c_{2i} < d_{2i} < c_{2i+1} < d_{2i+1}$.
De plus :

- $c_{2i} = a_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_j 3^j}{3^n} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j 3^{j+1}}{3^{n+1}}$,
- $d_{2i} = a_i + \frac{1}{3^{n+1}} = c_{2i} + \frac{1}{3^{n+1}}$,

- $c_{2i+1} = b_i - \frac{1}{3^{n+1}} = a_i + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}} = c_{2i} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2+\sum_{j=1}^n x_j 3^{j+1}}{3^{n+1}}$,
- $d_{2i+1} = b_i = c_{2i+1} + \frac{1}{3^{n+1}}$.

3. En déduire que C est l'ensemble des éléments de $[0, 1]$ dont le développement en base 3 ne comporte que des 0 et des 2.

Solution:
Les éléments de l'intervalle $[a_i, b_i]$ avec $a_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_j 3^j}{3^n}$ et $b_i = a_i + \frac{1}{3^n}$ sont exactement les éléments dont le développement triadique $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{3^j}$ vérifie $y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n$.

4. Décrire une bijection de C sur $[0, 1]$, en utilisant la description précédente.

Solution:
La bijection est :

$$C \mapsto [0,1]$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{3^j} \to \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j/2}{2^j}$$

Autrement dit, à un nombre dont un développement triadique ne comporte que des 0 et des 2 on fait correspondre un nombre défini par “son” développement dyadique en gardant les 0 et en remplaçant les 2 du développement triadique par des 1.

5. En déduire que C n'est pas dénombrable.

Solution:
C est en bijection avec $[0, 1]$.