Exercice 0 :

1. Montrer qu'il y a $n!$ permutations de $[\![1,n]\!]$.

Solution:
Par récurrence sur n. Il y a n choix pour $\sigma(1)$. Et l'ensemble des bijections de $[\![2,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(1)\}$ est en bijection avec l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.

2. Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i\in[\![1,mn+1]\!]}$ une suite d'entiers naturels. Montrer qu'il existe une sous-suite de taille $n+1$ qui est croissante ou une sous-suite de taille $m+1$ qui est décroissante.

Solution:
Soit c_i (d_i) la taille de la plus longue suite croissante commençant (décroissante terminant) en x_i. Par l'absurde, supposons que $c_i \leq n$ et $d_i \leq m$ pour tout i.

L'application $i \mapsto (c_i, d_i)$ de $[\![1, nm+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]$ est donc bien définie. Par le principe des tiroirs, elle n'est pas injective. Ainsi, soient $i < j$ tels que $(c_i, d_i) = (c_j, d_j)$.

Si $x_i \leq x_j$, soit $x_{\varphi(1)}, \dots x_{\varphi(c_j)}$ une sous-suite croissante de taille c_j et commençant en x_j, i.e. $j = \varphi(1)$. La suite $x_i, x_{\varphi(1)}, \dots x_{\varphi(c_j)}$ est croissante de taille $c_j + 1 > c_i$, contradiction.

Si $x_j < x_i$, raisonnement similaire avec les suites décroissantes mène à une contradiction.

Exercice 1 :

Démontrer par des arguments combinatoires les identités suivantes :

1. $\sum_{0\leq 2i\leq n} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}$ et $\sum_{0\leq 2i+1\leq n} \binom{n}{2i+1} = 2^{n-1}$.

Solution:
Si n est impair, le nombre de parties de cardinal pair est égal au nombre de parties de cardinal impair, parce que le passage au complémentaire échange les parties de cardinal pair et celles de cardinal impair. Dans le cas où n est pair, le nombre de parties de cardinal pair (resp. impair) qui contient n est égal au nombre de parties de cardinal impair (resp. pair) ne contenant pas n.

2. $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.

Solution:
Double comptage de $\{(x,F), x \in F\}$.

3. $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$, pour $0 \leq k \leq l \leq n$.

Solution:
On compte l'ensemble $\{(K,L), K \subset L \subset [\![1,n]\!], |K| = k, |L| = l\}$, d'abord en choisissant L, puis K à l'intérieur de L, puis en choisissant K et $L \setminus K$ dans $[\![1,n]\!] \setminus K$.

4. Soit m, n deux entiers naturels tels que $1 \leq m \leq n$.

$$\sum_{i=m}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{m} = 2^{n-m}\binom{n}{m}$$

Solution:
Double comptage de $\{(G,F), |G|=m, G\subset F\}$.

5. Pour tout entier $n \geq 2$:
$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

Solution:
On compte les parties à deux éléments dans $[\![1,2n]\!]$ en séparant le cas où les deux éléments ont la même parité (2 possibilités : pair ou impair) de celui où ce n'est pas le cas.

6. Pour tout entier $n \geq 3$:
$$\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)2^{n-3}$$

Solution:
Double comptage de $\{(x,y,z,F), x\in F, y\in F, z\in F$ et x,y,z tous distincts$\}$.

Exercice 2 :
Soit N un entier naturel non nul.

1. Soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des parties de cardinal 2 dans $[\![1,N]\!]$. En partitionnant judicieusement $\mathcal{E}_2$, retrouver l'égalité :
$$\sum_{j=1}^{N-1} j = \frac{N(N-1)}{2}$$

Solution:
On partitionne selon la valeur du plus grand élément de la partie de cardinal 2 et on remarque que $|\mathcal{E}_2| = \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$.

2. En partitionnant l'ensemble $[\![1,N]\!]^3$ selon la valeur maximale $\max(x,y,z)$ prise par le triplet (x,y,z), retrouver l'expression de $\sum_{j=1}^{N-1} j^2$ en fonction de N.

Solution:
Soit $n \in [\![1,N]\!]$.

- Il y a $3(n-1)^2$ triplets (x,y,z) tels que $\max(x,y,z)=n$ et cette valeur est prise par une seule des composantes du triplet.
- Il y a $3(n-1)$ triplets (x,y,z) tels que $\max(x,y,z)=n$ et cette valeur est prise par exactement deux des composantes du triplet.
- Il y a 1 triplet (x,y,z) tel que $\max(x,y,z)=n$ et cette valeur est prise par les trois composantes du triplet.

Donc $N^3 = 3\sum_{j=1}^{N-1} j^2 + 3\sum_{j=1}^{N-1} j + N$, ce qui en utilisant la question 1 fournit l'égalité :
$$\sum_{j=1}^{N-1} j^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$$

Exercice 3 :
Soit $n_1, \ldots, n_{12}$ une famille de 12 nombres entiers. Démontrer qu'il existe $i \neq j$ tels que $n_i - n_j$ est un multiple de 11 (au moins deux d'entre eux ont une différence divisible par 11).

Solution:
Regarder les restes des nombres n i par la division euclidienne par 11. Il y a 11 restes possibles, donc au moins deux valeurs distinctes parmi les n i ont le même reste. Leur différence est divisible par 11.

Exercice 4 :
Dans un groupe de six personnes, il existe un groupe de trois personnes qui se connaissent mutuellement ou un groupe de trois personnes qui ne se connaissent ni l'une ni l'autre.

Solution:
Par le principe des tiroirs, chaque personne connait au moins 3 personnes ou ne connait pas au moins 3 personnes. Si la personne 1 connait au moins 3 personnes, soit ces 3 personnes ne se connaissent pas, soit au moins deux se connaissent, ce qui fait un groupe de trois personnes qui se connaissent mutuellement. Le raisonnement est dual si la personne 1 ne connait pas au moins 3 personnes.

Exercice 5 :
Un mot de passe est considéré comme *valide* s'il vérifie les conditions suivantes :

- Il est formé de 8 caractères pris parmi les 26 lettres (minuscules) de l'alphabet, les chiffres entre 0 et 9, et les 7 caractères spéciaux !, ?, %, #, @, &, $.
- Il comprend au moins une lettre de l'alphabet.
- Il comprend au moins un chiffre.
- Il comprend au moins un caractère spécial.

Déterminer le nombre de mots de passe valides.

Solution:
Il y a a priori $26 + 10 + 7 = 43$ caractères dont 43^8 mots de 8 caractères. On cherche le nombre de non valides :

- Soit A l'ensemble des mots qui ne contiennent pas de lettre de l'alphabet ; $|A| = 17^8$.
- Soit B l'ensemble des mots qui ne contiennent pas de chiffre ; $|B| = 33^8$.
- Soit C l'ensemble des mots qui ne contiennent pas de caractère spécial ; $|C| = 36^8$.

On utilise la formule du crible :

- $A \cap B$ est l'ensemble des mots écrits uniquement avec des caractères spéciaux, donc $|A \cap B| = 7^8$.
- $A \cap C$ est l'ensemble des mots écrits uniquement avec des chiffres, donc $|A \cap C| = 10^8$.
- $B \cap C$ est l'ensemble des mots écrits uniquement avec des lettres, donc $|B \cap C| = 26^8$.
- $A \cap B \cap C$ est l'ensemble vide.

Donc $|A \cup B \cup C| = 17^8 + 33^8 + 36^8 - (7^8 + 10^8 + 26^8)$,
et il y a donc $43^8 - (17^8 + 33^8 + 36^8) + (7^8 + 10^8 + 26^8)(= 7662638823840)$.

Exercice 6 :

Soit m, n deux entiers naturels. On note $s(m,n)$ le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal m sur un ensemble de cardinal n.

1. Que valent $s(m,n)$ si $m < n$? Si $m = n$?

Solution:
$s(m,n) = 0$ si $m < n$, $s(m,n) = n!$ si $m = n$.

2. En utilisant la formule du crible, justifier l'égalité :

$$s(m,n) = n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m + \cdots + (-1)^n n$$

Solution:
Soit $I \subset [\![1,n]\!]$. On pose $E_I = \mathcal{F}([\![1,m]\!], [\![1,n]\!] \setminus I)$ (les applications de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ qui évitent I). Le cardinal de E_I est $(n-|I|)^m$. On applique la formule du crible à $\cup_{i\in[\![1,n]\!]} E_{\{i\}}$, qui est le complémentaire de l'ensemble des surjections, en constatant que $\cap_{i\in I} E_{\{i\}} = E_I$.

Exercice 7 (Théorème de Ramsey) :

1. Montrer que $\forall (n_r, n_b) \in \mathbb{N}^2, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour toute coloration en 2 couleurs $\{r, b\}$ du graphe complet K_N d'ordre N, il existe une couleur $c \in \{r, b\}$ et un sous-graphe complet de K_N d'ordre n_c qui soit monochromatique de couleur c.
(le plus petit N vérifiant cette propriété est noté $R(n_r, n_b)$).

Solution:
On raisonne par récurrence sur $n_r + n_b$. La définition implique clairement que, pour tout n, $R(n,1) = R(1,n) = 1$. Montrons que $R(n_r, n_b)$ existe en en donnant un majorant explicite. On suppose (hypothèse de récurrence) que $R(n_r - 1, n_b)$ et $R(n_r, n_b - 1)$ existent. On va montrer que $R(n_r, n_b) \leq R(n_r - 1, n_b) + R(n_r, n_b - 1)$.

Considérons un graphe complet 2-coloré ayant $R(r-1,s) + R(r,s-1)$ sommets. Choisissant un sommet v, on définit une partition des autres sommets en deux ensembles $M = \{w, (v,w) \text{ est rouge}\}$ et $N = \{w, (v,w) \text{ est bleue}\}$. Le graphe ayant $R(r-1,s) + R(r,s-1) = |M| + |N| + 1$ sommets, on a $|M| \leq R(r-1,s)$ ou $|N| \leq R(r,s-1)$. Dans le premier cas, si M contient un K_{n_b} monochromatique bleu, il en est du même du graphe initial ; sinon, M contient un K_{n_r-1} monochromatique rouge, et donc $M \cup v$ contient un K_{n_r} rouge par définition de M. Échangeant les couleurs, on a le même résultat (pour N) dans le second cas. L'inégalité est donc démontrée, ce qui achève par récurrence la démonstration du théorème pour deux couleurs.

2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour toute coloration en k couleurs du graphe complet K_N d'ordre N, il existe une couleur $c \in [\![1,k]\!]$ et un sous-graphe complet de K_N d'ordre n_c qui soit monochromatique de couleur c.
(le plus petit N vérifiant cette propriété est noté $R(n_1, \ldots, n_k)$).

Solution:
On raisonne par récurrence sur k. Le résultat est trivial pour $k = 1$ et vient d'être démontré pour $k = 2$. Si $k > 2$, on va montrer l'inégalité suivante :
$R(n_1, \ldots, n_k) \leq R(n_1, \ldots, n_{k-2}, R(n_{k-1}, n_k)) = t$.

Soit une k-coloration du graphe complet K_t ayant t sommets. Identifiant les couleurs $k-1$ et k, on obtient une $(k-1)$-coloration du graphe qui, d'après l'hypothèse de récurrence, contient soit un K_{n_i} monochromatique de couleur i avec $1 \leq i \leq k-2$, soit un $K_{R(n_{k-1},n_k)}$ de la couleur obtenue par identification. Le premier cas satisfait l'inégalité ; dans le second, on est donc ramené à un problème de 2-coloration et, par définition de $R(n_{k-1}, n_k)$, on doit avoir soit un $K_{n_{k-1}}$ $(k-1)$-monochrome, soit un K_{n_k} k-monochrome. Dans les deux cas, ceci achève la démonstration de l'inégalité. Par récurrence, le cas général est donc prouvé.