Rappel (INDEPENDENT SET) :

Un *ensemble indépendant* dans un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets dont aucun n'est relié à aucun autre par une arête de G, c'est-à-dire tel que $u, v \in C$ implique $\{u, v\} \notin E$.

Le langage INDEPENDENT SET défini comme suit est NP-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;

QUESTION : G a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins m ?

Exercice 1 (NODE COVER):

Un *recouvrement* C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets tel que toute arête de E est incidente à C, c'est-à-dire a au moins un élément de C. Démontrer que le langage NODE COVER défini comme suit est NP-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;

QUESTION : G a-t-il un recouvrement de cardinal au plus m ?

Solution:

C est un recouvrement de G (de cardinal au plus m) si et seulement si $V \setminus C$ est un ensemble indépendant de G (de cardinal au moins le cardinal de V moins m).

Exercice 2 (CLIQUE):

Une *clique* C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ induisant un sous-graphe complet de G, c'est-à-dire tel que pour tous $u, v \in C$ avec $u \neq v$, on a $\{u, v\} \in E$. Montrer que le problème CLIQUE défini comme suit est NP-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;

QUESTION : G a-t-il une clique de cardinal au moins m ?

Solution:

Soit $\overline{G}$ le graphe *complémentaire* de G, c'est-à-dire $\overline{G} = (V, \overline{E})$, où $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$. Alors C est une clique de G si et seulement si C est un ensemble indépendant de $\overline{G}$. Comme le calcul de $\overline{G}$ se fait en temps polynomial, INDEPENDENT SET $\preceq_{\mathrm{P}}$CLIQUE. Or CLIQUE $\in$ NP : il suffit de deviner la clique, de vérifier qu'elle est de cardinal au moins m, et que c'est bien une clique.

Exercice 3 (3-COLORING):

Les cartographes essayent d'utiliser le moins de couleurs possibles lorsqu'ils colorient une carte, et que deux deux pays frontaliers ne soient pas coloriés de la même couleur. On peut modéliser ce problème de la manière suivante.

Une *k-coloration* d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \to \{0, \ldots k - 1\}$ telle que si $\{u, v\} \in E$ alors $c(u) \neq c(v)$. Montrer que le problème suivant est NP-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté G ;

QUESTION : Existe-t-il une 3-coloration de G ?

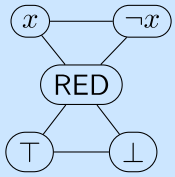
Solution:

On réduit 3-SAT-NON-TRIV. Soit $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ une instance de 3-SAT-NON-TRIV. On construit un graphe dont les sommets sont :

$$V = \{x \in var(\varphi)\} \cup \{\neg x \mid x \in var(\varphi)\} \cup \{c_i^1, c_i^2, \cdots, c_i^5 \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{\top, \bot, \mathsf{RED}\}$$

On place des arêtes de la manière suivante :

- Les sommets $\top, \bot, \mathsf{RED}$ forment un triangle.
- Pour toute variable x, les sommets $x, \neg x, \mathsf{RED}$ forment un triangle.



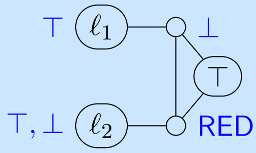
Ces premières arêtes assurent que, pour toute 3-coloration :

- $\top, \bot, \mathsf{RED}$ ont des couleurs différentes.
- pour toute variable x, x et $\neg x$ ont des couleurs différentes, prises parmi $c(\top), c(\bot)$.

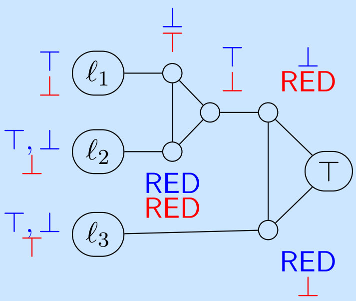
Ainsi, à une 3-coloration correspond une valuation des variables ; et réciproquement, toute valuation peut être représentée par une 3-coloration du graphe.

On encode maintenant les clauses avec les gadgets suivants :

- Si $C_i = \ell_1 \vee \ell_2$, on utilise 2 des nœuds c_i^j pour construire le gadget :



- Si $C_i = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$, on utilise les 5 nœuds c_i^j pour construire le gadget suivant :



Si on a une 3-coloration des sommets $x, \neg x, \top, \bot, \mathsf{RED}$, on montre qu'une clause est satisfaite par la valuation correspondante si et seulement si on peut 3-colorier son gadget (en étendant la 3-coloration de départ) :

- Si $C_i = \ell_1 \vee \ell_2$.
  - Si $c(\ell_1) = c(\top)$, on colorie le gadget comme en bleu sur la figure ci-dessus (le cas $c(\ell_2) = c(\top)$ est symétrique).
  - Si $c(\ell_1) = c(\ell_2) = c(\bot)$, on ne peut pas 3-colorier le gadget.
- Si $C_i = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$.
  - Si $c(\ell_1) = c(\top)$, on colorie le gadget comme en bleu sur la figure ci-dessus (le cas $c(\ell_2) = c(\top)$ est symétrique).
  - Si $c(\ell_1) = c(\ell_2) = c(\bot)$ et $c(\ell_3) = c(\top)$, on colorie le gadget comme en rouge sur la figure ci-dessus.
  - Si $c(\ell_1) = c(\ell_2) = c(\ell_3) = c(\bot)$, on ne peut pas 3-colorier le gadget.

Exercice 4 (GRAPH HOMOMORPHISM):

Un homomorphisme d'un graphe $G = (V, E)$ à un graphe $G' = (V', E')$ est une fonction $h : V \to V'$ telle que pour tout $\{v_1, v_2\} \in E$, on a $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$. Montrer que le problème suivant est NP-complet.

ENTRÉE : deux graphes non orientés, G_1 et G_2 ;

QUESTION : Existe-t-il un homomorphisme de G_1 à G_2 ?

Solution:

On réduit 3-COLORING : G est trois coloriable ssi il existe un homomorphisme de G dans K_3.

Exercice 5 (SUBGRAPH ISOMORPHISM):

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes si $|V| = |V'|$ et $|E| = |E'|$ et il existe une fonction bijective $h : V \to V'$ telle que $\{v_1, v_2\} \in E$, si et seulement si $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$. Montrer que le problème suivant est NP-complet.

ENTRÉE : Deux graphes G et H.

QUESTION : Est-ce que G contient un sous-graphe isomorphe à H ?

Solution:

On réduit INDEPENDENT SET : G a un sous-ensemble indépendant de cardinal au moins m ssi il existe un sous-graphe de G isomorphe à $\overline{K_m}$.

Exercice 6 (Logique temporelle):

Les formules de la logique K4.3 sont définies par la grammaire suivante :

$$\begin{aligned} \varphi ::= {} & \bot \mid \top \mid p && \text{(avec } p \text{ variable propositionelle)} \\ & \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \\ & \mid \mathsf{F}\,\varphi \mid \mathsf{G}\,\varphi \end{aligned}$$

Un modèle d'une telle formule est un ensemble $\mathfrak{M}$ de mondes muni d'une relation $\mathcal{R}$ transitive et linéaire, et où chaque monde $w \in \mathfrak{M}$ est muni d'une valuation $\nu(w)$. On définit la satisfaction d'une formule φ de K4.3 par un monde $w \in \mathfrak{M}$ par induction structurelle sur φ :

- $\mathfrak{M}, w \models \top$.
- $\mathfrak{M}, w \not\models \bot$.
- $\mathfrak{M}, w \models p$ ssi $p \in \nu(w)$.
- $\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi$ ssi $\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$.
- $\mathfrak{M}, w \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ssi $\mathfrak{M}, w \models \varphi_1$ et $\mathfrak{M}, w \models \varphi_2$.
- $\mathfrak{M}, w \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ ssi $\mathfrak{M}, w \models \varphi_1$ ou $\mathfrak{M}, w \models \varphi_2$.
- $\mathfrak{M}, w \models \mathsf{F}\,\varphi$ ssi $\exists w' \in \mathfrak{M}$ tel que $w\mathcal{R}w'$ et $\mathfrak{M}, w' \models \varphi$.
- $\mathfrak{M}, w \models \mathsf{G}\,\varphi$ ssi $\forall w' \in \mathfrak{M}$ tel que $w\mathcal{R}w'$, $\mathfrak{M}, w' \models \varphi$.

Une formule de K4.3 est satisfiable s'il existe un modèle $\mathfrak{M}$ et un monde $w \in \mathfrak{M}$ tels que $\mathfrak{M}, w \models \varphi$.

On s'intéresse au problème de satisfiabilité pour cette logique.

1. Justifier que ce problème est NP-difficile.
2. ⋆ Soit φ une formule de K4.3. Montrer que s'il existe un modèle $\mathfrak{M}$ qui satisfait φ, alors il existe un modèle fini $\mathfrak{M}'$ qui satisfait φ.

3. Soit φ une formule de K4.3. Montrer que s'il existe un modèle $\mathfrak{M}'$ qui satisfait φ, alors il existe un modèle $\mathfrak{M}''$ de taille polynomiale en la taille de φ qui la satisfait.
4. Conclure que le problème de satisfiabilité pour la logique K4.3 est dans NP.