**Exercice 1 (3SAT):**

Un *littéral* est soit une proposition atomique soit la négation d'une proposition atomique. Une *clause* (disjonctive) est une disjonction de littéraux. Une formule sous forme normale conjonctive (CNF) est une conjonction de clauses. Ainsi $\varphi \equiv p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_1)$ est une formule CNF composée de deux clauses. Une formule 3CNF est une formule CNF dont les clauses ont au plus trois littéraux. 3SAT est le problème correspondant à la satisfiabilité d'une formule 3CNF.

Deux formules $\varphi$ et $\psi$ sont équivalentes si pour toute interprétation $\nu$, on a : $\nu(\varphi) = \nu(\psi)$. Pour toute formule, on peut construire une formule CNF équivalente comme suit.

- Pousser les négations devant les propositions :
  - $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ ;
  - $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1) \wedge (\neg\varphi_2)$ ;
  - $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1) \vee (\neg\varphi_2)$.
- Pousser les disjonctions sous les conjonctions : $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$.

Cependant la formule obtenue est de taille exponentielle et cette explosion est inévitable.

Montrer que 3SAT est NP-complet.

**Solution:**

Soit $\varphi$ une formule arbitraire, on construit en temps polynomial une formule 3CNF $\psi$ comme suit.

- Pour toute occurrence d'un opérateur, on ajoute une nouvelle proposition et on étiquette le noeud de l'arbre syntaxique de la formule par cette proposition ;
- Les clauses of $\psi$ sont définies comme suit. La proposition étiquetant la racine est une clause et pour tout sommet interne de l'arbre :
  - Si c'est une négation étiquetée par $x$ et $y$ étiquette son fils, alors $\neg x \vee \neg y$ et $x \vee y$ sont des clauses ;
  - Si c'est une conjonction étiquetée par $x$ et $y, z$ étiquettent ses fils, alors $x \vee \neg y \vee \neg z$ et $\neg x \vee y$, $\neg x \vee z$ sont des clauses ;
  - Si c'est une disjonction étiquetée par $x$ et $y, z$ étiquettent ses fils, alors $\neg x \vee y \vee z$ et $x \vee \neg y$, $x \vee \neg z$ sont des clauses.

Voici un exemple de traduction.

$$
\begin{aligned}
\varphi &= (\neg(p \wedge q)) \vee r \\
\psi &= x_v \wedge (\neg x_v \vee x_n \vee r) \wedge (x_v \vee \neg x_n) \wedge (x_v \vee \neg r) \\
&\quad \wedge \ (\neg x_n \vee \neg x_w) \wedge (x_n \vee x_w) \\
&\quad \wedge (x_w \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg x_w \vee p) \wedge (\neg x_w \vee q)
\end{aligned}
$$

Montrons que $\varphi$ est satisfaisable si et seulement si $\psi$ est satisfaisable.

- Supposons que $\nu \models \varphi$. Définissons $\nu'$ étendant $\nu$ sur les nouvelles propositions ainsi. Soit $x$ une proposition correspondant à un noeud interne de sous-formule $\varphi_x$. On choisit $\nu'(x) = \nu(\varphi_x)$. On vérifie immédiatement que $\nu' \models \psi$.
- Supposons que $\nu \models \psi$. Par induction sur la taille des sous-formules, on établit que $\nu(x) = \nu(\varphi_x)$. En examinant la clause $x$ où $x$ étiquette la racine, on obtient $\nu(\varphi) = \top$.

**Remarque.**

Dans la réduction ci-dessus, on n'utilise que des 2-clauses ou des 3-clauses non triviales (par de clause vide, de 1-clause ou de tautologie). On peut donc définir le problème 3-SAT-NON-TRIV , lui aussi NP-complet, comme étant 3SAT avec des entrées non triviales.

**Exercice 2 (1-IN-3SAT):**

1-IN-3SAT est le problème suivant :

**Donnée :** Un ensemble des clauses $C_1, \cdots, C_m$, $m > 1$ ; chaque $C_i$ est une disjonction d'exactement 3 littéraux.

**Question :** Existe-t-il une valuation telle que seulement un littéral soit vrai dans chaque $C_i$ ?

Montrer que 1-IN-3SAT est $\mathtt{NP}$-complet.

**Solution:**

On effectue une réduction polynomiale de 3SAT à 1-IN-3SAT.

Soit $C_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$ une clause d'une instance de 3SAT. Dans l'instance de 1-IN-3SAT correspondante, on produit les trois clauses suivantes, avec quatre variables fraiches $a_i, b_i, c_i, d_i$ :

$$C_{i_1} = \{\overline{x_{i_1}}, a_i, b_i\}, C_{i_2} = \{x_{i_2}, b_i, c_i\}, C_{i_3} = \{\overline{x_{i_3}}, c_i, d_i\}$$

Ainsi, si l'instance de 3SAT a $n$ variables et $m$ clauses, l'instance 1-IN-3SAT correspondante aura $n + 4m$ variables et $3m$ clauses. Cette transformation peut être faite en temps polynomial. Montrons que l'instance initiale est acceptée par 3SAT si et seulement si sa traduction est acceptée par 1-IN-3SAT.

Supposons que l'instance de 3SAT n'est pas satisfaisable. Alors, pour toute valuation, il existe une clause $C_i$ où on a $x_{i_1} = \bot$, $x_{i_2} = \bot$ and $x_{i_3} = \bot$. Essayons d'étendre une telle valuation afin d'avoir une instance valide pour les clauses $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}$ : Dans $C_{i_2}$, comme $x_{i_2} = \bot$, exactement $b_i$ ou $c_i$ doit être vrai ; si $b_i = \top$, $C_{i_1}$ ne peut pas être satisfait ; si $c_i = \top$, $C_{i_3}$ ne peut pas être satisfait. Il est donc impossible de satisfaire exactement un littéral de chaque clause de l'instance de 1-IN-3SAT correspondante.

Réciproquement, supposons que l'instance de 3SAT est satisfaisable. Il existe donc une valuation telle que chaque $C_i$ est vrai. Montrons qu'on peut toujours étendre une telle valuation pour satisfaire l'instance de 1-IN-3SAT correspondante :

- Si $x_{i_2} = \top$, alors on doit poser $b_i = \bot$ et $c_i = \bot$ pour que $C_{i_2}$ soit satisfait. On peut alors poser $a_i = x_{i_1}$ et $d_i = x_{i_3}$ pour que $C_{i_1}$ et $C_{i_3}$ soient correctement satisfaits.
- Si $x_{i_2} = \bot$ :
  - Si $x_{i_1} = \top$ et $x_{i_3} = \top$, on pose $a_i = \top$, $b_i = \bot$, $c_i = \top$, $d_i = \bot$ et les trois clauses $C_{i_k}$ sont correctement satisfaites.
  - Si seulement $x_{i_1} = \top$, on pose $a_i = \bot$, $b_i = \top$, $c_i = \bot$, $d_i = \bot$ et les trois clauses $C_{i_k}$ sont correctement satisfaites.
  - Si seulement $x_{i_3} = \top$, on pose $a_i = \bot$, $b_i = \bot$, $c_i = \top$, $d_i = \bot$ et les trois clauses $C_{i_k}$ sont correctement satisfaites.

Au final, une valuation rendant vraie l'instance de 3SAT peut toujours être étendue en une valuation satisfaisant correctement son instance de 1-IN-3SAT correspondante.

Donc 1-IN-3SAT est $\mathtt{NP}$-difficile.

**Exercice 3 (3-SAT-3-OCC):**

Le problème 3-SAT-3-OCC est le suivant :

ENTRÉE : une liste finie, $S$, de 3-clauses, où chaque variable propositionnelle apparaît au plus 3 fois ;

QUESTION : $S$ est-elle satisfiable ?

Montrer que 3-SAT-3-OCC est $\mathtt{NP}$-complet, même lorsque chaque littéral a, au plus, 2 occurrences dans la formule.

**Solution:**
D'abord, 3-SAT-3-OCC est dans NP, car c'est un cas particulier de 3-SAT. On peut vérifier que chaque variable apparaît au plus 3 fois en maintenant un compteur pour chaque et en parcourant la formule d'entrée. Montrons que 3-SAT $\preceq_{\mathrm{P}}$3-SAT-3-OCC. Pour chaque variable $A$ qui apparaît strictement plus de 3 fois dans l'instance $S$ de 3-SAT donnée, remplacer chaque occurrence de $A$ par une variable fraîche, disons $A_1, \ldots, A_n$. Puis ajouter les clauses $-A_1 \vee +A_2$, $-A_2 \vee +A_3$, $\ldots$, $-A_{n-1} \vee +A_n$ et $-A_n \vee +A_1$ (implication circulaire). Les environnements qui rendent ces dernières clauses vraies sont exactement ceux qui donnent à $A_1, \ldots, A_n$ la même valeur de vérité. Si $S'$ est l'ensemble de clauses résultant de la transformation, et $\rho \models S'$, alors l'environnement qui à chaque variable $A$ associe la valeur commune $\rho(A_1) = \ldots = \rho(A_n)$ satisfait donc $S$. Réciproquement, si $\rho \models S$, alors l'environnement qui à toute variable $A_i$ associe $\rho(A)$ satisfait $S'$. De plus, la transformation est clairement en temps polynomial.

**Exercice 4 (INDEPENDENT SET):**
Un *ensemble indépendant* dans un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets dont aucun n'est relié à aucun autre par une arête de $G$, c'est-à-dire tel que $u, v \in C$ implique $\{u, v\} \notin E$.

Démontrer que le langage INDEPENDENT SET défini comme suit est NP-complet.
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;
QUESTION : $G$ a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins $m$ ?

**Solution:**
D'abord, INDEPENDENT SET est dans NP : il suffit de deviner une partie $C$ de $V$, et de vérifier qu'elle est de cardinal au moins $m$ et qu'elle forme un ensemble indépendant.

Réciproquement, on réduit 3-SAT-NON-TRIV (exercice 1). On part donc d'un ensemble de 3-clauses $S$ qui ne contient pas la clause vide, ni aucune tautologie ni aucune clause unitaire. Pour chaque clause $L_1 \vee L_2 \vee L_3$, on fabrique trois sommets frais formant un triangle. De même pour les clauses de taille 2 $L_1 \vee L_2$, on fabrique deux sommets frais reliés par une arête. (On appellera ceci encore un triangle… dégénéré.) Pour toute clause $C$ contenant un littéral $+A$ et toute clause $C'$ contenant le littéral opposé $-A$, on relie les sommets correspondants. Aucun ensemble indépendant ne peut contenir plus d'un sommet par triangle, donc, s'il y a $m$ clauses dans $S$, aucun ensemble indépendant n'est de cardinal strictement supérieur à $m$. S'il existe un ensemble indépendant $I$ de cardinal $m$, il contient exactement un sommet de chaque clique. Si un sommet étiqueté $+A$ est dans $I$, aucun sommet de $I$ ne peut être étiqueté $-A$, et réciproquement : ceci fournit directement une affectation satisfaisant $S$. Réciproquement, si $\rho$ est une affectation satisfaisant $S$, on forme un ensemble indépendant en sélectionnant un littéral vrai dans chaque clause.

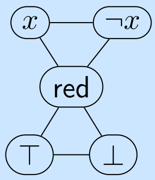
**Exercice 5 (3-COLORING):**
Les cartographes essayent d'utiliser le moins de couleurs possibles lorsqu'ils colorient une carte, et que deux deux pays frontaliers ne soient pas coloriés de la même couleur. On peut modéliser ce problème de la manière suivante.
Une *k-coloration* d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \to \{0, \ldots k-1\}$ telle que si $\{u, v\} \in E$ alors $c(u) \neq c(v)$. Montrer que le problème suivant est NP-complet.
ENTRÉE : un graphe non orienté $G$ ;
QUESTION : Existe-t-il une 3-coloration de $G$ ?

**Solution:**
On réduit 3-SAT-NON-TRIV. Soit $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ une instance de 3-SAT-NON-TRIV. On construit un graphe dont les sommets sont :

$$V = \{x \in var(\varphi)\} \cup \{\neg x \mid x \in var(\varphi)\} \cup \{c_i^1, c_i^2, \cdots, c_i^5 \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{\top, \bot, \mathsf{RED}\}$$

On place des arêtes de la manière suivante :

- Les sommets $\top, \bot, \mathsf{RED}$ forment un triangle.
- Pour toute variable $x$, les sommets $x, \neg x, \mathsf{RED}$ forment un triangle.

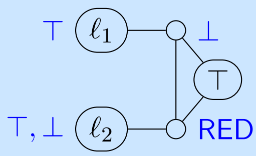



Ces premières arêtes assurent que, pour toute 3-coloration :

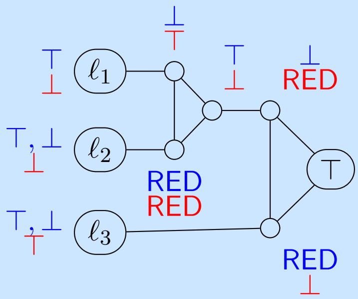
- $\top, \bot, \mathsf{RED}$ ont des couleurs différentes.
- pour toute variable $x$, $x$ et $\neg x$ ont des couleurs différentes, prises parmi $c(\top), c(\bot)$.

Ainsi, à une 3-coloration correspond une valuation des variables ; et réciproquement, toute valuation peut être représentée par une 3-coloration du graphe.
On encode maintenant les clauses avec les gadgets suivants :

- Si $C_i = \ell_1 \vee \ell_2$, on utilise 2 des nœuds $c_i^j$ pour construire le gadget :




- Si $C_i = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$, on utilise les 5 nœuds $c_i^j$ pour construire le gadget suivant :




Si on a une 3-coloration des sommets $x, \neg x, \top, \bot, \mathsf{RED}$, on montre qu'une clause est satisfaite par la valuation correspondante si et seulement si on peut 3-colorier son gadget (en étendant la 3-coloration de départ) :

- Si $C_i = \ell_1 \vee \ell_2$.
  - Si $c(\ell_1) = c(\top)$, on colorie le gadget comme en bleu sur la figure ci-dessus (le cas $c(\ell_2) = c(\top)$ est symétrique).
  - Si $c(\ell_1) = c(\ell_2) = c(\bot)$, on ne peut pas 3-colorier le gadget.
- Si $C_i = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$.

- Si $c(\ell_1) = c(\top)$, on colorie le gadget comme en bleu sur la figure ci-dessus (le cas $c(\ell_2) = c(\top)$ est symétrique).
- Si $c(\ell_1) = c(\ell_2) = c(\bot)$ et $c(\ell_3) = c(\top)$, on colorie le gadget comme en rouge sur la figure ci-dessus.
- Si $c(\ell_1) = c(\ell_2) = c(\ell_3) = c(\bot)$, on ne peut pas 3-colorier le gadget.

**Exercice 6 (NODE COVER):**

Un *recouvrement* $C$ d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets tel que toute arête de $E$ est incidente à $C$, c'est-à-dire à au moins un élément de $C$. Démontrer que le langage NODE COVER défini comme suit est NP-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;
QUESTION : $G$ a-t-il un recouvrement de cardinal au plus $m$ ?

**Solution:**

$C$ est un recouvrement de $G$ (de cardinal au plus $m$) si et seulement si $V \setminus C$ est un ensemble indépendant de $G$ (de cardinal au moins le cardinal de $V$ moins $m$).

**Exercice 7 (CLIQUE):**

Une *clique* $C$ d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ induisant un sous-graphe complet de $G$, c'est-à-dire tel que pour tous $u, v \in C$ avec $u \neq v$, on a $\{u, v\} \in E$. Montrer que le problème CLIQUE défini comme suit est NP-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;
QUESTION : $G$ a-t-il une clique de cardinal au moins $m$ ?

**Solution:**

Soit $\overline{G}$ le graphe *complémentaire* de $G$, c'est-à-dire $\overline{G} = (V, \overline{E})$, où $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$. Alors $C$ est une clique de $G$ si et seulement si $C$ est un ensemble indépendant de $\overline{G}$. Comme le calcul de $\overline{G}$ se fait en temps polynomial, INDEPENDENT SET $\preceq_{\mathrm{P}}$CLIQUE. Or CLIQUE $\in$ NP : il suffit de deviner la clique, de vérifier qu'elle est de cardinal au moins $m$, et que c'est bien une clique.

**Exercice 8 (GRAPH HOMOMORPHISM):**

Un homomorphisme d'un graphe $G = (V, E)$ à un graphe $G' = (V', E')$ est une fonction $h : V \to V'$ telle que pour tout $\{v_1, v_2\} \in E$, on a $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$. Montrer que le problème suivant est NP-complet.

ENTRÉE : deux graphes non orientés, $G_1$ et $G_2$ ;
QUESTION : Existe-t-il un homomorphisme de $G_1$ à $G_2$ ?

**Solution:**

On réduit 3-COLORING : $G$ est trois coloriable ssi il existe un homomorphisme de $G$ dans $K_3$.

**Exercice 9 (SUBGRAPH ISOMORPHISM):**

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes si $|V| = |V'|$ et $|E| = |E'|$ et il existe une fonction bijective $h : V \to V'$ telle que $\{v_1, v_2\} \in E$, si et seulement si $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$. Montrer que le problème suivant est NP-complet.

ENTRÉE : Deux graphes $G$ et $H$.
QUESTION : Est-ce que $G$ contient un sous-graphe isomorphe à $H$ ?

**Solution:**
On reduit INDEPENDANT SET : $G$ a un independant subset de cardinal au moins $m$ ssi il existe un sous-graphe de $G$ isomorphe à $\overline{K_m}$.