λ-Calcul et Logique Informatique

`leroux@lsv.fr`

Exercice 1 — Système $\mathcal{D}_\omega$ ("Généralisation" du Système $\mathcal{D}$)
On étend le système $\mathcal{D}$ en ajoutant un type atomique spécial noté ω, et la règle de typage suivante :

$$\frac{}{\Gamma \vdash M : \omega}$$

1. Donner un terme typable dans $\mathcal{D}_\omega$ mais pas dans $\mathcal{D}$. En termes calculatoires, quelle propriété de typage a-t-on perdu ? Nous reste-t-il quelque chose d'intéressant ?
2. Montrer que $u \to v$ et $\Gamma \vdash v : T$ implique $\Gamma \vdash u : T$.
3. Montrer que tout terme faiblement normalisant est typable dans $\mathcal{D}_\omega$ par un type sans ω.

   On va voir que la réciproque est vraie si on se restreint aux "bons" types. Pour cela, posons quelques définitions. Un ensemble $\mathcal{X}$ est dit *saturé* si

   $$u[x := t]\ t_1 \dots t_n \in \mathcal{X} \ \text{ implique } \ (\lambda x.\ u)\ t\ t_1 \dots t_n \in \mathcal{X}$$

   Pour $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \Lambda$, on définit

   $$\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y} := \{\ u \in \Lambda \mid (u\ v) \in \mathcal{Y} \text{ pour tout } v \in \mathcal{X}\ \}$$

   Finalement, étant donnée une interprétation $\mathcal{I}$ qui à tout type de base α associe un ensemble saturé $|\alpha|_\mathcal{I}$, on l'étend aux types comme suit :

   $$|\omega|_\mathcal{I} = \Lambda \qquad |T \cap T'|_\mathcal{I} = |T|_\mathcal{I} \cap |T'|_\mathcal{I} \qquad |T \Rightarrow T'|_\mathcal{I} = |T|_\mathcal{I} \Rightarrow |T'|_\mathcal{I}$$

4. Si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$ et $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$, comparer $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}' \Rightarrow \mathcal{Y}'$.
5. Montrer que $|T|_\mathcal{I}$ est saturé pour tout T.
6. Montrer que $x_1 : T_1, \dots, x_n : T_n \vdash u : T$ et $t_i \in |T_i|_\mathcal{I}$ pour tout i impliquent $u[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] \in |T|_\mathcal{I}$.

   On dit que $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ est une *paire adéquate* si $\mathcal{N}$ est saturé, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}_0 \Rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$.
   On dit que ω apparaît positivement (resp. négativement) dans un type T s'il apparaît à gauche d'un nombre pair (resp. impair) d'implications. Par exemple, ω apparaît uniquement positivement dans ω et $(\omega \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$ et il apparaît uniquement négativement dans $\alpha \Rightarrow (\omega \cap \beta) \Rightarrow \gamma$.

7. Formaliser la notion d'occurence positive et négative.

8. Soit $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ une paire adéquate et $\mathcal{I}$ une interprétation telle que pour tout α on a $\mathcal{N}_0 \subseteq |\alpha|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$. Montrer alors que pour tout T sans occurrence positive (resp. négative) de ω on a $|T|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{N}_0 \subseteq |T|_{\mathcal{I}}$).
9. Montrer qu'on a une paire adéquate si l'on prend $\mathcal{N}$ l'ensemble des termes qui normalisent selon la stratégie externe gauche et $\mathcal{N}_0$ l'ensemble des termes $(x\ t_1 \dots t_n)$ avec x une variable et chaque $t_i \in \mathcal{N}$.
10. Soit $\cdot \vdash u : T$ avec T sans occurrence positive de ω. Montrer que u normalise faiblement.

Solution exercice 1

1. Tout terme qui n'est pas fortement normalisant convient.
2. Comme tout terme est typable, en invoquant une question de l'exercice sur le système $\mathcal{D}$, on déduit que si $\Gamma \vdash u[x := v] : \tau$ est dérivable, alors $\Gamma \vdash (\lambda x.u)v : \tau$ aussi. Soit $s \to s'$. Alors il existe deux termes u et v, et un contexte à un trou C, tels que $s = C[(\lambda x.u)v]$ et $s' = C[u[x := v]]$. Soit une dérivation de conclusion $\Gamma \vdash s' : F$. Il existe une sous-dérivation d'icelle typant $u[x := v]$, de conclusion de la forme $\Gamma \vdash u[x := v] : \tau$, donc d'après une remarque ci-dessus, il en existe aussi une de la forme $\Gamma \vdash (\lambda x.u)v : \tau$.

   Dans la dérivation de $\Gamma \vdash C[u[x := v]] : F$, remplaçons cette occurrence de $\Gamma \vdash u[x := v] : \tau$ par $\Gamma \vdash (\lambda x.u)v : \tau$, puis les occurrences de $u[x := v]$ qui correspondent au trou de C par $(\lambda x.u)v$. Cela construit une dérivation de $\Gamma \vdash C[(\lambda x.u)v] : \tau$.
3. On montre que tout terme s faiblement normalisant est typable dans $\mathcal{D}_\omega$ par un type sans ω, par récurrence bien fondée sur $\nu(s)$, la "distance" de s à un terme β-normal.
   — Si s est normal, il est typable dans le système $\mathcal{D}$ par un exercice précédent.
   — Sinon, soit s' tel que $s \to s'$ et $\nu(s') = \nu(s) - 1$. Par HR s' est typable par un type sans ω, et donc s aussi par la question précédente.
4. Soit $u \in \mathcal{X}' \Rightarrow \mathcal{Y}'$ et $v \in \mathcal{X}$. Alors $v \in \mathcal{X}'$, donc $uv \in \mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$. Ainsi $\mathcal{X}' \Rightarrow \mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}$.
5. On montre que $|T|_{\mathcal{I}}$ est saturé par récurrence sur T.
   — Si T est un type de base ou ω, alors $|T|_{\mathcal{I}}$ est saturé par définition.
   — Supposons que $|F|_{\mathcal{I}}$ et $|G|_{\mathcal{I}}$ soient saturés. Soient $u, t, t_1, \dots, t_n \in \Lambda$ tels que $u[x := t]t_1 \dots t_n \in |F \cap G|_{\mathcal{I}} = |F|_{\mathcal{I}} \cap |G|_{\mathcal{I}}$. Alors $(\lambda x.u)tt_1 \dots t_n \in |F|_{\mathcal{I}}$, car $|F|_{\mathcal{I}}$ est saturé, et pareil pour $|G|_{\mathcal{I}}$. Donc $(\lambda x.u)tt_1 \dots t_n \in |F|_{\mathcal{I}} \cap |G|_{\mathcal{I}} = |F \cap G|_{\mathcal{I}}$.
   — Supposons que $|F|_{\mathcal{I}}$ et $|G|_{\mathcal{I}}$ soient saturés. Soient $u, t, t_1, \dots, t_n \in \Lambda$ tels que $u[x := t]t_1 \dots t_n \in |F \Rightarrow G|_{\mathcal{I}} = |F|_{\mathcal{I}} \Rightarrow |G|_{\mathcal{I}}$. Soit $v \in |F|_{\mathcal{I}}$ arbitraire. Alors $u[x := t]t_1 \dots t_n v \in |G|_{\mathcal{I}}$, par définition de $|F|_{\mathcal{I}} \Rightarrow |G|_{\mathcal{I}}$, puis $(\lambda x.u)tt_1 \dots t_n v \in |G|_{\mathcal{I}}$ car $|G|_{\mathcal{I}}$ est saturé. Ainsi, $(\lambda x.u)tt_1 \dots t_n \in |F|_{\mathcal{I}} \Rightarrow |G|_{\mathcal{I}} = |F \Rightarrow G|_{\mathcal{I}}$.
6. Par récurrence sur la dérivation de $x_1 : T_1, \dots, x_n : T_n \vdash u : T$, où les objets de l'affirmation sont quantifiés universellement. Soit $\Gamma := \{x_1 : T_1, \dots, x_n : T_n\}$ et $\theta := [x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n]$ des raccourcis syntaxiques.
   — Cas de la règle Var. Donc $u = x_i$ pour un unique i. Ainsi $u[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] = t_i$, ce qui appartient à $|T_i|_{\mathcal{I}}$ par hypothèse. De plus $T = T_i$, d'où le résultat.
   — Cas de la règle App. Donc u est de la forme AB et le typage de AB vient de $\Gamma \vdash A : F \Rightarrow T$ et $\Gamma \vdash B : F$. Par HR $A\theta \in |F \Rightarrow T|_{\mathcal{I}}$ et $B\theta \in |F|_{\mathcal{I}}$. Ainsi $(AB)\theta \in |T|_{\mathcal{I}}$.
   — Cas de la règle Abs. Donc u est de la forme $\lambda y.A$ et le typage de $\lambda y.A$ est de la forme $\Gamma \vdash \lambda y.A : F \Rightarrow G$ et vient de $\Gamma, y : F \vdash A : G$. Soient $t_1 \in |T_1|_{\mathcal{I}}, \dots, t_n \in |T_n|_{\mathcal{I}}$. On veut montrer que $(\lambda y.A)\theta \in |F \Rightarrow G|_{\mathcal{I}}$. Soit donc $v \in |F|_{\mathcal{I}}$. Il suffit de montrer que $(\lambda y.A\theta)v \in |G|_{\mathcal{I}}$. Par HR, $A[\theta, y := v] \in |G|_{\mathcal{I}}$. Or y est fraîche (i.e. n'apparaît pas dans les t_i), donc $A[\theta, y := v] = A\theta[y := v]$. Par saturation de $|G|_{\mathcal{I}}$, on obtient $(\lambda y.A\theta)v \in |G|_{\mathcal{I}}$.

- Cas où $T = F \cap G$ et $\Gamma \vdash u : F \cap G$ vient de $\Gamma \vdash u : F$ et $\Gamma \vdash u : G$. Par HR $u\theta \in |F|_\mathcal{I}$ et $u\theta \in |G|_\mathcal{I}$, donc $u\theta \in |F|_\mathcal{I} \cap |G|_\mathcal{I} = |F \cap G|_\mathcal{I}$.
- Cas où $\Gamma \vdash u : T$ vient de $\Gamma \vdash u : T \cap T'$. Par HR $u\theta \in |T \cap T'|_\mathcal{I} \subseteq |T|_\mathcal{I}$.

7. — ω apparaît positivement dans ω.
   - Si ω apparaît positivement (resp. négativement) dans F, il apparaît positivement (resp. négativement) dans $G \Rightarrow F$ et négativement (resp. positivement) dans $F \Rightarrow G$.
   - Si ω apparaît positivement (resp. négativement) dans F, alors aussi dans $F \cap G$.

   Remarque : ω peut apparaître à la fois positivement et négativement.
8. On dit que $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ est une *paire adéquate* si $\mathcal{N}$ est saturé, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}_0 \Rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$.

   Soit $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ une paire adéquate et $\mathcal{I}$ une interprétation telle que pour tout α on a $\mathcal{N}_0 \subseteq |\alpha|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$. Montrer alors que pour tout T sans occurrence positive (resp. négative) de ω on a $|T|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{N}_0 \subseteq |T|_\mathcal{I}$).

   Par récurrence sur T.
   - Si T est un type de base α, alors $\mathcal{N}_0 \subseteq |T|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$ par hypothèse.
   - Si $T = \omega$,
     - ω apparaît positivement dans T.
     - ω n'apparaît pas négativement dans T, mais on a bien $|T|_\mathcal{I} = \Lambda \supseteq \mathcal{N}_0$.
   - Si $T = F \cap G$.
     - Cas où il n'y a pas d'occurence positive. Donc il n'y en a ni dans F ni dans G. Par HR, $|F|_\mathcal{I}, |G|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$, donc $|T|_\mathcal{I} = |F|_\mathcal{I} \cap |G|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$.
     - Cas où il n'y a pas d'occurence négative. Donc il n'y en a ni dans F ni dans G. Par HR, $\mathcal{N}_0 \subseteq |F|_\mathcal{I}, |G|_\mathcal{I}$, donc $\mathcal{N}_0 \subseteq |F|_\mathcal{I} \cap |G|_\mathcal{I} = |T|_\mathcal{I}$.
   - Si $T = F \Rightarrow G$.
     - Cas où il n'y a pas d'occurence positive. Donc il n'y en a pas dans G, et pas d'occurence négative dans F. Par HR $|G|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_0 \subseteq |F|_\mathcal{I}$. Donc par une question précédente, $|F \Rightarrow G|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}_0 \Rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$.
     - Cas où il n'y a pas d'occurence négative. Donc il n'y en a pas dans G, et pas d'occurence positive dans F. Par HR $\mathcal{N}_0 \subseteq |G|_\mathcal{I}$ et $|F|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$. Donc par une question précédente, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N}_0 \subseteq |F \Rightarrow G|_\mathcal{I}$.
9. — Montrons que $\mathcal{N}$ est saturé : Soit $u[x := t]\ t_1 \dots t_n \in \mathcal{N}$, i.e. ce terme normalise selon la stratégie externe gauche (SEG). Or, la première étape de la SEG de $(\lambda x.\ u)\ t\ t_1 \dots t_n \in \mathcal{X}$ réduit ce terme à $u[x := t]\ t_1 \dots t_n \in \mathcal{N}$, donc le terme est aussi dans $\mathcal{N}$.
   - Montrons que $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$. Soit $u \in \mathcal{N}_0$. Soient donc $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{N}$ et x une variable tel que $u := xt_1 \dots t_n$. Alors, par définition, la SEG réduit u d'abord dans t_1, puis dans t_2, etc, et arrive à un terme normal $xt'_1 \dots t'_n$. En particulier $u \in \mathcal{N}$, donc $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$.
   - Montrons que $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N}_0$. Soit $u \in \mathcal{N}_0$. Soient donc $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{N}$ et x une variable tel que $u := xt_1 \dots t_n$. Soit $v \in \mathcal{N}$, alors $uv = xt_1 \dots t_n v$ avec $t_1, \dots, t_n, v \in \mathcal{N}$. Donc $uv \in \mathcal{N}_0$. Ainsi $u \in \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N}_0$.
   - Montrons que $\mathcal{N}_0 \Rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$. Soit $u \in \mathcal{N}_0 \Rightarrow \mathcal{N}$. Soit x une variable. Donc $x \in \mathcal{N}_0$ (avec une suite vide d'argument t_i), donc $ux \in \mathcal{N}$. Ainsi, la SEG normalise sur ux, donc également sur u. Donc $u \in \mathcal{N}$.
10. Par hypothèse $\cdot \vdash u : T$, donc $u \in |T|_\mathcal{I}$ par une question précédente. Par hypothèse T est sans occurrence positive de ω, donc en prenant $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_0$ comme à la question précédente, et grâce à une autre question précédente, on obtient $|T|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$. Ainsi, u est faiblement normalisant.