λ-Calcul et Logique Informatique

leroux@lsv.fr

Exercice 1 — Système $\mathcal{D}$ (types intersection)
On considère le système de types suivant :

$$\frac{}{\Gamma, x : T \vdash x : T} \quad \frac{\Gamma, x : T \vdash M : T'}{\Gamma \vdash \lambda x.M : T \Rightarrow T'} \quad \frac{\Gamma \vdash M : T \Rightarrow T' \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash M\ N : T'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : T_1 \quad \Gamma \vdash M : T_2}{\Gamma \vdash M : T_1 \cap T_2} \quad \frac{\Gamma \vdash M : T_1 \cap T_2}{\Gamma \vdash M : T_i}$$

1. Pour chacun des termes suivants, donner un type que ce terme admet dans le système $\mathcal{D}$: $\lambda x.\ x\ x$, $\lambda x \lambda y.\ x\ (y\ x)$, $(\lambda x.\ x\ x)\ (\lambda y.\ y)$.
2. Quelle est la différence avec les règles de la conjonction/couple ? Quel sens ce système peut-il avoir dans le contexte du typage des langages de programmations ?
3. Parmi les types suivants, donner un terme pour ceux qui sont habités (on ne tentera pas de prouver qu'un type n'est pas habité) :
   — $(\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \tau) \Rightarrow (\alpha \cap \beta) \Rightarrow \tau$
   — $((\alpha \cap \beta) \Rightarrow \tau) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \tau$
   — $((\tau \Rightarrow \alpha) \cap (\tau \Rightarrow \beta)) \Rightarrow \tau \Rightarrow (\alpha \cap \beta)$
   — $(\tau \Rightarrow (\alpha \cap \beta)) \Rightarrow ((\tau \Rightarrow \alpha) \cap (\tau \Rightarrow \beta))$
4. (a) Considérons la définition du cours des candidats de réductibilité. Montrer que l'intersection d'une famille non vide de candidats est un candidat.
   (b) Proposer une définition pour $\mathrm{RED}_{T \cap T'}$ et généraliser le théorème du cours reproduit ci-après : si $\Gamma \vdash u : G$ est dérivable, alors pour toute $\theta \in \mathrm{RED}_\Gamma$ on a $u\theta \in RED_G$.
   (c) Montrer que tout terme typable dans le système $\mathcal{D}$ est fortement normalisant.
5. Montrer que pour tout terme u en forme normale il existe Γ et T tels que $\Gamma \vdash u : T$. Indice : on a vu une façon pratique d'écrire une forme normale.
6. On définit la fusion de deux contextes de liaison comme suit.
   — $\Gamma \wedge \emptyset := \Gamma$ (et symmétriquement)
   — $\Gamma \wedge (\Delta, x : F) := (\Gamma \wedge \Delta), x : F$ si $x \notin \Gamma$ (et symmétriquement)
   — $(\Gamma, x : F) \wedge (\Delta, x : G) := (\Gamma \wedge \Delta), x : F \cap G$.

   (a) Si les ensembles des variables de Γ et Δ sont disjoints, exprimer $\Gamma \wedge \Delta$ autrement.
   (b) Justifier brièvement quelles relations il y a entre $\Gamma \wedge \Gamma$ et Γ ; puis entre $\Gamma \wedge \Delta$ et $\Delta \wedge \Gamma$; puis entre $(\Gamma \wedge \Delta) \wedge \Sigma$ et $\Gamma \wedge (\Delta \wedge \Sigma)$.
   (c) Montrer que $\Gamma \vdash u : F$ implique $\Gamma \wedge \Delta \vdash u : F$.
7. (a) Montrer que si $\Gamma \vdash u[x := v] : \tau$ et $\Gamma \vdash v : \sigma$ sont dérivables et $x \notin FV(v)$, alors $\Gamma \vdash (\lambda x.u)v : \tau$ est dérivable.
   (b) Montrer que si $\Gamma \vdash u[x := v] : \tau$ et $\Delta \vdash v : \sigma$ sont dérivables, alors $\Gamma \wedge \Delta \vdash (\lambda x.u)v : \tau$ est dérivable.

8. Montrer que tout terme fortement normalisant est typable dans $\mathcal{D}$.

Solution exercice 1

1. — Pour tous types F et G, on dérive $x : (F \Rightarrow G) \cap F \vdash x\ x : G$, puis $\vdash \lambda x.\ x\ x : ((F \Rightarrow G) \cap F) \Rightarrow G$.
   — Pour tous types F et G, on dérive $x : F \Rightarrow G, y : (F \Rightarrow G) \Rightarrow F \vdash x(yx) : F$, sans utiliser les types intersection, puis $\vdash \lambda x \lambda y.\ x\ (y\ x) : (F \Rightarrow G) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow F) \Rightarrow G$.
   — Pour tous types A, B, C, on dérive $\vdash \lambda y.\ y : A \Rightarrow A$ et $\vdash \lambda y.\ y : (B \Rightarrow C) \Rightarrow B \Rightarrow C$ sans utiliser les types intersection, d'où $\vdash \lambda y.\ y : (A \Rightarrow A) \cap ((B \Rightarrow C) \Rightarrow B \Rightarrow C)$. En imposant $B := C := A$ et $F := G := A \Rightarrow A$ dans le typage de $\lambda x.xx$ ci-dessus, on obtient $\vdash (\lambda x.\ x\ x)\ (\lambda y.\ y) : A \Rightarrow A$
2. Les règles de la conjonction/paire obligent à choisir entre les deux types possibles dès la construction du terme, via les projections π_1 et π_2. Avec les types intersections, un terme peut avoir deux types simultanément, ce qui est plus proche du polymorphisme des langages de programmation.
3. — On dérive $x : \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \tau, y : \alpha \cap \beta \vdash x\ y\ y : \tau$, puis on obtient le résultat par abstractions.
   — Peut-être pas habité (car avoir $x : \alpha$ et $y : \beta$ dans le contexte ne permet pas de dériver $z : \alpha \cap \beta$).
   — Soit $\Delta := y : (\tau \Rightarrow \alpha) \cap (\tau \Rightarrow \beta)$ et $\Gamma := \Delta, x : \tau$. On dérive $\Gamma \vdash y\ x : \alpha$ et $\Gamma \vdash y\ x : \beta$, d'où $\Gamma \vdash y\ x : \alpha \cap \beta$. On conclut par deux abstractions successives.
   — Soit $\Delta := y : \tau \Rightarrow (\alpha \cap \beta)$ et $\Gamma := \Delta, x : \tau$. On dérive $\Gamma \vdash y\ x : \alpha \cap \beta$, puis $\Gamma \vdash y\ x : \alpha$ et $\Gamma \vdash y\ x : \beta$, d'où $\Delta \vdash \lambda x.\ y\ x : \tau \Rightarrow \alpha$ et $\Delta \vdash \lambda x.\ y\ x : \tau \Rightarrow \beta$, d'où le résultat par intersection suivie d'une abstraction.
4. (a) Il suffit de vérifier que les trois conditions CR1, CR2, CR3 sont préservées par intersection. Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille non-vide de candidats de réductibilité, et soit $S := \cap_{i \in I} S_i$.
   CR1 Soit $k \in I$. On a $S \subseteq S_k \subseteq SN$
   CR2 Soient $u \in S$ et u' tel que $u \rightarrow u'$. Alors pour tout $i \in I$, on a $u \in S_i$, donc $u' \in S_i$. Ainsi $u' \in S$.
   CR3 Soit u qui n'est pas une lambda abstraction, et tel que tous les réduits en une étape soient dans S. Alors pour tout $i \in I$, ces réduits sont dans S_i, donc u aussi. Ainsi, $u \in S$.

   (b) On pose $\mathrm{Red}_{T \cap T'} := \mathrm{Red}_T \cap \mathrm{Red}_{T'}$. En plus de $\mathrm{Red}_{F \Rightarrow F'} := \mathrm{Red}_F \Rightarrow \mathrm{Red}_{F'}$ et $\mathrm{Red}_F := SN$ pour tout type de base F.
   On montre que si $\Gamma \vdash u : G$ est dérivable dans le Système $\mathcal{D}$, alors pour toute $\theta \in \mathrm{RED}_\Gamma$ on a $u\theta \in RED_G$. On procède par récurrence sur la dérivation $\Gamma \vdash u : G$.
   — On remarque que si la dernière règle utilisée est Var, *Abs* ou *App*, on peut conclure comme dans le cours.
   — Cas où la dernière règle utilisée est

$$\frac{\Gamma \vdash u : F \quad \Gamma \vdash u : G}{\Gamma \vdash u : F \cap G}$$

   Soit $\theta \in \mathrm{RED}_\Gamma$. Par HR $u\theta \in \mathrm{RED}_F$ et $u\theta \in \mathrm{RED}_G$, donc $u\theta \in \mathrm{RED}_{F \cap G}$.
   — Cas où la dernière règle utilisée est

$$\frac{\Gamma \vdash u : T_1 \cap T_2}{\Gamma \vdash u : T_i}$$

Soit $\theta \in \mathrm{RED}_\Gamma$. Par HR $u\theta \in \mathrm{RED}_{T_1 \cap T_2}$. Or $\mathrm{RED}_{T_1 \cap T_2} = \mathrm{RED}_{T_1} \cap \mathrm{RED}_{T_2}$, donc $u\theta \in \mathrm{RED}_{T_i}$.

(c) Soit une dérivation $\Gamma \vdash u : G$. Alors la question ci-dessus, en prenant la substitution identité pour θ, nous donne $u \in \mathrm{RED}_G$. Or $\mathrm{RED}_G \subseteq SN$ par CR1, d'où le résultat.

5. Notons d'abord que pour λ-terme u et tout typage $\Gamma, x : \alpha \vdash u : \tau$ et type β, on a aussi $\Gamma, x : \alpha \cap \beta \vdash u : \tau$. Cela se montre (facilement) par récurrence sur les dérivations de $\Gamma, x : \alpha \vdash u : \tau$.

   On répond maintenant à la question de l'énoncé par récurrence forte sur la taille des λ-termes, la taille étant définie, par exemple, par récurrence structurelle sur les λ-termes. (La taille d'une variable est 1, la lambda-abstraction rajoute 1, l'application additionne les tailles.)

   Le résultat est clair pour les variables. Considérons donc un λ-terme non trivial en forme normale. Il peut se présenter en forme normal de tête $u = \lambda x_1 \ldots x_n . y M_1 \ldots M_p$, où y est une variable (soit libre, soit un x_i) et les M_j sont en formes normales, de taille plus petite que u. Par hypothèse de récurrence, pour tout $j \leq p$ il existe Γ_j et T_j tels que $\Gamma_j \vdash M_j : T_j$.

   Soit α un type (de base). Si $y \notin \cup_j FV(M_j)$, soit $\tau_y := T_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_p \Rightarrow \alpha$. Sinon, soit $\tau_y := \tau_y^0 \cap (T_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_p \Rightarrow \alpha)$, où pour tout $z \in \cup_j FV(M_j)$, le type τ_z^0 est l'intersection des types attribués à z par les Γ_j.

   Soit Γ l'union des Γ_j dans laquelle les liaisons (potentiellement multiples) des $z \in \{y\} \cup (\cup_j FV(M_j))$ ont été remplacées par les $\{z : \tau_z\}$.

   Par la remarque du début appliquée aux $z \in \{y\} \cup (\cup_j FV(M_j))$, on a $\Gamma \vdash M_j : T_j$ pour tout j. Ainsi $\Gamma \vdash y M_1 \ldots M_p : \alpha$, le typage de u suit par λ-abstraction.

6. (À faire : parler de $x : F$ et $x : (F \cap F) \cap F$, etc.)

   (a) On a alors que $\Gamma \wedge \Delta$ est égal à Γ, Δ.

   (b) On montre facilement que $\Gamma, x : F \vdash x : F \cap F$ et $\Gamma, x : F \cap F \vdash x : F$ et $\Gamma, x : F \cap G \vdash x : G \cap F$ et $\Gamma, x : (F \cap G) \cap H \vdash x : F \cap (G \cap H)$. Puis on montre par récurrence sur le nombre de liaisons dans Γ que $\Gamma \wedge \Gamma \vdash u : F$ ssi $\Gamma \vdash u : F$, que $\Gamma \wedge \Delta \vdash u : F$ ssi $\Delta \wedge \Gamma \vdash u : F$, et que $(\Gamma \wedge \Delta) \wedge \Sigma \vdash u : F$ ssi $\Gamma \wedge (\Delta \wedge \Sigma) \vdash u : F$.

   (c) C'est similaire au lemme d'affaiblissement vu en cours pour le λ-calcul simplement typé. Par récurrence sur la dérivation. Il faut juste faire un peu attention pour la λ-abstraction :

$$\frac{\Gamma, x : T \vdash M : T'}{\Gamma \vdash \lambda x . M : T \Rightarrow T'}$$

   Par HR on a $(\Gamma, x : T) \wedge \Delta \vdash M : T'$. À α-renommage près, on impose $x \notin \Delta$, donc par définition cela donne $(\Gamma \wedge \Delta), x : T \vdash M : T'$, d'où le résultat.

7. (a) Par α-renommage, $x \notin FV(v)$ donc $x \notin FV(u[x := v])$. On peut donc supposer que $x \notin \Gamma$. Premier cas, $x \notin FV(u)$, donc $\Gamma \vdash u : \tau$, donc $\Gamma, x : \sigma \vdash u : \tau$ par affaiblissement "simple", d'où le résultat par abstraction puis application.

   Deuxième cas, $x \in FV(u)$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les n occurrences de x (libre) dans u. Soient $\sigma_1, ..., \sigma_n$ les types des occurrences de v dans $u[x := v]$, i.e. à la place des $x_1, \ldots, x_n$. Montrons par récurrence sur u que $\Gamma, x : \sigma_1 \cap \cdots \cap \sigma_n \vdash u : \tau$.

   — Si $u = x$ on a $\Gamma \vdash v : \tau$ à la conclusion de cette dérivation. De plus, $\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau$, d'où le résultat. Si $u = y$, contradiction.

— Cas où $u = AB$. On a $\Gamma \vdash A[x := v] : F \Rightarrow \tau$ pour un certain F, et $\Gamma \vdash B[x := v] : F$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ (resp. $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n$) les types des occurrences de v dans $A[x := v]$ (resp. $B[x := v]$). Par HR on a $\Gamma, x : \sigma_1 \cap \cdots \cap \sigma_p \vdash A : F \Rightarrow \tau$ et $\Gamma, x : \sigma_{p+1} \cap \cdots \cap \sigma_n \vdash B : F$. Ainsi $\Gamma, x : \sigma_1 \cap \cdots \cap \sigma_n \vdash AB : \tau$.

— Si $u = \lambda y.A$, alors τ s'écrit $F \Rightarrow G$, et $\Gamma, y : F \vdash A[x := v] : G$. Par HR on a $\Gamma, y : F, x : \sigma_1 \cap \cdots \cap \sigma_n \vdash A : G$, où $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les types des occurrences de v dans $A[x := v]$, d'où le résultat par abstraction.

On a donc $\Gamma \vdash \lambda x.u : \sigma_1 \cap \cdots \cap \sigma_n \Rightarrow \tau$. Or $\Gamma \vdash v : \sigma_1 \cap \cdots \cap \sigma_n$, d'où le résultat.

(b) D'après une question précédente, on a $\Gamma \wedge \Delta \vdash u[x := v] : \tau$ et $\Gamma \wedge \Delta \vdash v : \sigma$ sont dérivables, donc d'après la question précédente $\Gamma \wedge \Delta \vdash (\lambda x.u)v : \tau$ est dérivable.

8. Montrons que tout terme s fortement normalisant est typable dans le système $\mathcal{D}$, par récurrence lexicographique sur $(\nu(s), |s|)$, où $\nu(s)$ est la longueur maximale d'une réduction à partir de s.

— Si $\nu(0)$, alors s est normal et il suffit d'invoquer une question précédente.

— Sinon, soit s' tel que $s \to s'$. Alors il existe deux termes u et v, et un contexte à un trou C, tels que $s = C[(\lambda x.u)v]$ et $s' = C[u[x := v]]$. Donc $\nu(s) > \nu(s')$. Par HR s' est typable. Soit une dérivation de conclusion $\Gamma \vdash s' : F$. Il existe une sous-dérivation d'icelle typant $u[x := v]$, de conclusion de la forme $\Gamma \vdash u[x := v] : \tau$. Notons que pour tout Δ, par affaiblissement de cette dérivation, on obtient une dérivation de conclusion $\Gamma \wedge \Delta \vdash s' : F$ où $\Gamma \wedge \Delta \vdash u[x := v] : \tau$ apparaît.

Comme s est fortement normalisant, v aussi. Plus précisément, $\nu(s) \geq \nu(v)$. D'autre part $|s| > |v|$, donc par HR v est typable, disons par $\Delta \vdash v : \sigma$. Par une question précédente, on peut dériver $\Gamma \wedge \Delta \vdash (\lambda x.u)v : \tau$.

Dans la dérivation de $\Gamma \wedge \Delta \vdash C[u[x := v]]$, remplaçons $\Gamma \wedge \Delta \vdash u[x := v] : \tau$ par $\Gamma \wedge \Delta \vdash (\lambda x.u)v : \tau$, puis les occurrences de $u[x := v]$ qui correspondent au trou de C par $(\lambda x.u)v$. Cela construit une dérivation de $\Gamma \wedge \Delta \vdash C[(\lambda x.u)v] : \tau$.