λ-Calcul et Logique Informatique

leroux@lsv.fr

Exercice 1 — Réduction et typage
On rappelle la règle de η-réduction :

$$\lambda x.\ M\ x \to_\eta M \quad \text{si} \quad x \notin \mathrm{FV}(M)$$

1. Montrer que la β-réduction préserve le typage : $u \to_\beta v$ et $\Gamma \vdash u : T$ implique $\Gamma \vdash v : T$. (Normalement vu/lu en cours)
2. Montrer que la η-réduction préserve le typage.
3. (a) Montrer que la η-expansion ne préserve pas le typage : $u \to_\eta v$ et $\Gamma \vdash v : T$ n'implique pas forcément $\Gamma \vdash u : T$.
   (b) Quelle condition permettrait d'obtenir cette propriété ?
4. (a) De même pour la β-expansion. Quelle propriété importante du typage perd-on forcément dans un système de types pour lequel le typage est préservé par β-expansion ?
   (b) Quelle condition permettrait de pallier ce problème ?

Exercice 2 — Couples
On considère le λ-calcul étendu avec couples et projections :

$$M ::= x \mid \lambda x.\ M \mid M\ N \mid \langle M, N \rangle \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M$$

La réduction est la plus petite congruence contenant β et les nouvelles règles suivantes :

$$\pi_1\langle M_1, M_2\rangle \ \to\ M_1 \qquad\qquad \pi_2\langle M_1, M_2\rangle \ \to\ M_2$$

1. Proposer un système de types pour ce calcul, tel que la réduction préserve le typage.
2. Dans la correspondance de Curry-Howard, comment s'interprète (logiquement) le type du couple ?

Solution exercice 1

1. Vu en cours.
2. On montre d'abord le lemme d'amincissement : si $\Gamma, x : F_1 \vdash v : F$ est dérivable et x n'est pas libre dans v, alors $\Gamma \vdash v : F$ est dérivable. Ceci ce fait par récurrence structurelle sur la dérivation de $\Gamma, x : F_1 \vdash v : F$. Plus précisément, on fait une disjonction de cas sur la règle utilisée à la dernière étape de la dérivation, et on a droit de supposer que la propriété est vrai pour les dérivations structurellement plus petites.

   Dans un deuxième temps, en examinant les dérivations possibles, on note que si $\Gamma \vdash \lambda x.ux : F_1 \Rightarrow F_2$, avec $x \notin FV(u)$, alors $\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2$, et on conclut par amincissement.

3. (a) Soit F un type de base, i.e. sans flèche, et x, y deux variables distinctes. Alors $y : F \vdash y : F$ est dérivable, mais $y : F \vdash \lambda x.yx : F$ ne l'est pas car yx ne peut pas être typé sachant $y : F$.
   (b) Il suffirait de restreindre la η-expansion aux λ-abstractions.
4. (a) On perd la normalisation forte. On a $(\lambda x.y)\Omega \to_\beta y$. Dans un sytème de type traditionel, les variables sont typables, donc y doit l'être. u typable.
   (b) Il suffirait de restreindre la β-expansion vers les termes typables.