λ-calcul et logique informatique

leroux@lsv.fr

Exercice 1 — Réflexifs
Soit un espace réflexif (D, r, i), *i.e.*, on a $r : D \to [D \to D]$ et $i : [D \to D] \to D$ tels quel $r \circ i = \mathrm{id}_{[D\to D]}$. On y interprète le λ-calcul comme suit :

$$[\![x]\!]_\rho = \rho(x) \quad [\![M\ N]\!]_\rho = r([\![M]\!]_\rho)([\![N]\!]_\rho) \quad [\![\lambda x.\ M]\!]_\rho = i(v \mapsto [\![M]\!]_{\rho[x:=v]})$$

1. Montrer que $[\![u]\!]_\rho = [\![v]\!]_\rho$ quand $u \to_\beta v$.
2. On dit que D est un réflexif extensionnel quand $i \circ r = \mathrm{id}_D$. Montrer qu'on a alors $[\![u]\!]_\rho = [\![v]\!]_\rho$ quand $u \to_\eta v$.

Solution exercice 1

1. Dans un premier temps, on montre que pour tout x, t, s, ρ (l'ordre est important pour la récurrence), on a $[\![s]\!]_{\rho[x:=[\![t]\!]_\rho]} = [\![s[x := t]]\!]_\rho$. Ceci ce montre par récurrence structurelle sur s.
   - Cas s est une variable : $[\![y]\!]_{\rho[x:=[\![t]\!]_\rho]} = \rho[x := [\![t]\!]_\rho](y) = \rho(y) = [\![y]\!]_\rho = [\![y[x := t]]\!]_\rho$ et $[\![x]\!]_{\rho[x:=[\![t]\!]_\rho]} = \rho[x := [\![t]\!]_\rho](x) = [\![t]\!]_\rho = [\![x[x := t]]\!]_\rho$.
   - Cas $s = AB$.

$$\begin{aligned}
[\![AB]\!]_{\rho[x:=[\![t]\!]_\rho]} &= r([\![A]\!]_{\rho[x:=[\![t]\!]_\rho]})([\![B]\!]_{\rho[x:=[\![t]\!]_\rho]})\\
&= r([\![A[x := t]]\!]_\rho)([\![B[x := t]]\!]_\rho) \text{ par HR}\\
&= [\![(A[x := t])(B[x := t])]\!]_\rho\\
&= [\![(AB)[x := t]]\!]_\rho
\end{aligned}$$

   - Cas $s = \lambda y.A$.

$$\begin{aligned}
[\![\lambda y.A]\!]_{\rho[x:=[\![t]\!]_\rho]} &= i(v \mapsto [\![A]\!]_{\rho[x:=[\![t]\!]_\rho][y:=v]})\\
&= i(v \mapsto [\![A]\!]_{\rho[y:=v][x:=[\![t]\!]_\rho]}) \text{ car } x \notin BV(\lambda y.A) \text{ donc } x \neq y\\
&= i(v \mapsto [\![A[x := t]]\!]_{\rho[y:=v]}) \text{ par HR}\\
&= [\![\lambda y.(A[x := t])]\!]_\rho = [\![(\lambda y.A)[x := t]]\!]_\rho
\end{aligned}$$

   Grâce à cela, on montre dans un deuxième temps que $[\![(\lambda x.s)t]\!]_\rho = [\![s[x := t]]\!]_\rho$.

$$\begin{aligned}
[\![(\lambda x.s)t]\!]_\rho &= r([\![(\lambda x.s)]\!]_\rho)([\![t]\!]_\rho)\\
&= r(i(v \mapsto [\![s]\!]_{\rho[x:=v]}))([\![t]\!]_\rho) = r \circ i(v \mapsto [\![s]\!]_{\rho[x:=v]})([\![t]\!]_\rho)\\
&= (v \mapsto [\![s]\!]_{\rho[x:=v]})([\![t]\!]_\rho) = [\![s]\!]_{\rho[x:=[\![t]\!]_\rho]}\\
&= [\![s[x := t]]\!]_\rho \text{ par le résultat ci-dessus.}
\end{aligned}$$

Dans un troisième temps, on étend la propriété ci-dessus à toutes les β-réductions passage au contexte. Plus précisément, montrons que pour tout termes u, v tels que $u \to_\beta v$ et pour tout environnement ρ, on a $[\![u]\!]_\rho = [\![v]\!]_\rho$. Par récurrence structurelle sur $u \to_\beta v$.

— Cas $u = (\lambda x.s)t$ par le résultat ci-dessus.
— Cas $u = AB$ et $v = A'B$ avec $A \to A'$. Ainsi $[\![u]\!]_\rho = [\![AB]\!]_\rho = r([\![A]\!]_\rho)([\![B]\!]_\rho) = r([\![A']\!]_\rho)([\![B]\!]_\rho) = [\![v]\!]_\rho$, l'avant-dernière égalité par HR.
— De manière similaire.
— Cas où $u = \lambda x.A$ et $v = \lambda x.A'$ avec $A \to A'$. Ainsi

$$\begin{aligned}[\![u]\!]_\rho &= [\![\lambda x.A]\!]_\rho = i(v \mapsto [\![A]\!]_{\rho[x:=v]}) = i(v \mapsto [\![A']\!]_{\rho[x:=v]}) \text{ par HR} \\ &= [\![\lambda x.A']\!]_\rho = [\![v]\!]_\rho\end{aligned}$$

2. On rappelle que l'η-réduction est définie par $\lambda x.ux \to_\eta u$ pour tout terme u et $x \notin FV(u)$.

   On remarque dans un premier temps que $[\![x]\!]_{\rho[x:=v]} = v$. On montre dans un deuxième temps, par récurrence structurelle sur u, que pour tout terme u, toute variable x et tout environnement ρ, si $x \notin FV(u)$ alors $[\![u]\!]_{\rho[x:=v]} = [\![u]\!]_\rho$. (Cela ressemble au début de la question 1, mais je n'ai pas trouvé de propriété unificatrice dont les deux découleraient.)

— Cas où u est une variable y différente de x. Alors $[\![y]\!]_{\rho[x:=v]} = \rho(x := v)(y) = \rho(y) = [\![y]\!]_\rho$
— Cas où $u = AB$. Alors

$$\begin{aligned}[\![u]\!]_{\rho[x:=v]} &= [\![AB]\!]_{\rho[x:=v]} = r([\![A]\!]_{\rho[x:=v]})([\![B]\!]_{\rho[x:=v]}) \\ &= r([\![A]\!]_\rho)([\![B]\!]_\rho) \text{ par HR et car } x \notin FV(u) = FV(A) \cup FV(B) \\ &= [\![u]\!]_\rho\end{aligned}$$

— Cas où $u = \lambda y.A$. Alors

$$\begin{aligned}[\![u]\!]_{\rho[x:=v]} &= [\![\lambda y.A]\!]_{\rho[x:=v]} = i(t \mapsto [\![A]\!]_{\rho[x:=v][y:=t]}) \\ &= i(t \mapsto [\![A]\!]_{\rho[y:=t][x:=v]}) \text{ car } x \neq y \\ &= i(t \mapsto [\![A]\!]_{\rho[y:=t]}) \text{ par HR} \\ &= [\![\lambda y.A]\!]_\rho = [\![u]\!]_\rho\end{aligned}$$

Grâce aux résultats ci-dessus, on montre dans un troisième temps que si $x \notin FV(u)$, alors $[\![\lambda x.ux]\!]_\rho = [\![u]\!]_\rho$. Pour cela on remarquera aussi que la fonction $v \mapsto f(v)$ et la fonction f sont égales (extensionnellement, i.e. en maths traditionelles).

$$\begin{aligned}[\![\lambda x.ux]\!]_\rho &= i(v \mapsto [\![ux]\!]_{\rho[x:=v]}) = \\ &= i(v \mapsto [\![ux]\!]_{\rho[x:=v]}) = i(v \mapsto r([\![u]\!]_{\rho[x:=v]})([\![x]\!]_{\rho[x:=v]}) \\ &= i(v \mapsto r([\![u]\!]_\rho)(v)) \\ &= i(r([\![u]\!]_\rho)) \text{ car la fonction } v \mapsto r([\![u]\!]_\rho)(v) \text{ est égale à } r([\![u]\!]_\rho) \\ &= [\![u]\!]_\rho \text{ car } i \circ r = \mathrm{id}_D\end{aligned}$$

Dans un troisième temps, on étend le résultat par passage au contexte, ce qui répond à la question.

Exercice 2 — Modèle de Engeler

Soit A un ensemble non vide. Informellement, on définit un ensemble B d'arbres d'arbres ...d'arbres de A. Plus précisément

— $B_0 := A$

— $B_{n+1} := B_n \cup (\mathcal{P}_{\text{fin}}(B_n) \times B_n)$ pour tout entier naturel n.

— $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

1. Donner une autre expression de $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times B) \cup A$.

   Le modèle de Engeler est alors donné par le domaine $D = (\mathcal{P}(B), \subseteq)$, et les fonctions

   — $r : D \to (D \to D)$ telle que $r(x) = y \mapsto \{b \in B \mid \exists \beta \subseteq_{\text{fin}} y.\ (\beta, b) \in x\}$

   — $i : (D \to D) \to D$ telle que $i(f) = \{(\beta, b) \in B \mid b \in f(\beta)\}$
2. Calculer $[\![\lambda x.\ x]\!]$, $[\![\lambda x.\ \lambda y.\ x]\!]$ et $[\![\lambda x.\ x\ x]\!]$ dans ce modèle.
3. Vérifier qu'on a bien un ordre partiel complet. On pose alors $[D \to D]$ l'espace des fonctions Scott-continues de D dans D. Vérifier que r et i définissent un réflexif pour ces fonctions.
4. Montrer que ce réflexif n'est pas extensionnel.

Solution exercice 2

1. Montrons que $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times B) \cup A = B$ par double inclusion.

   — Soit $(\beta, b) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times B$. Soit donc n tel que $b \in B_n$. D'autre part, β peut s'écire $\{b_1, \dots, b_k\}$ avec $b_i \in B_{j_i}$ pour tout i. Soit $m := \max\{n, j_1, \dots, j_k\}$. Ainsi $\beta \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(B_m)$ et $b \in B_m$, donc $(\beta, b) \in B_{m+1} \subseteq B$. Comme $A \subseteq B$, cela montre que $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times B) \cup A \subseteq B$.

   — Soit $b \in B$. Si $b \in A$, on a fini, supposons donc que $b \notin A$. Ainsi, b est dans un B_n avec $n \geq 1$, et peut donc s'écrire (β, b') avec $b' \in B_{n-1}$ et $\beta \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(B_{n-1}) \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(B)$. D'où $b \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times B$.
2. Soit un environnement $\rho : \mathcal{V} \to D$.

   — $[\![\lambda x.\ x]\!]_\rho = i(v \mapsto [\![x]\!]_{\rho[x:=v]}) = i(v \mapsto v) = \{(\beta, b) \in B \mid b \in \beta\}$

   — On a

   $$\begin{aligned}[\![\lambda y.\ x]\!]_\rho &= i(v \mapsto [\![x]\!]_{\rho[y:=v]}) = i(v \mapsto [\![x]\!]_\rho) = i(v \mapsto \rho(x)) \\ &= \{(\beta, b) \in B \mid b \in \rho(x)\} = \mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times \rho(x)\end{aligned}$$

   Donc

   $$\begin{aligned}[\![\lambda x.\ \lambda y.\ x]\!]_\rho &= i(v \mapsto [\![\lambda y.\ x]\!]_{\rho[x:=v]}) = i(v \mapsto \mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times v) \\ &= \{(\beta, b) \in B \mid b \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \times \beta\}\end{aligned}$$

   — Pour tout $v \in D$, on a $r(v)(v) = \{b \in B \mid \exists \beta \subseteq_{\text{fin}} v.\ (\beta, b) \in v\}$ donc

   $$\begin{aligned}[\![\lambda x.\ x\ x]\!]_\rho &= i(v \mapsto [\![x\ x]\!]_{\rho[x:=v]}) = i(v \mapsto r([\![x]\!]_{\rho[x:=v]})([\![x]\!]_{\rho[x:=v]}) = i(v \mapsto r(v)(v)) \\ &= \{(\beta, b) \in B \mid b \in r(\beta)(\beta)\} = \{(\beta, b) \in B \mid \exists \beta' \subseteq_{\text{fin}} \beta.\ (\beta', b) \in \beta\}\end{aligned}$$
3. Le domaine $D = (\mathcal{P}(B), \subseteq)$ est un ordre partiel complet : la borne supérieure est donnée par l'union.

   Montrons que $r \circ i$ est l'identité sur $[D \to D]$. Soit $f \in [D \to D]$, donc par définition de la continuité de Scott, pour tout $y \in D$ on a $f(y) = \cup_{\beta \subseteq_{\text{fin}} y} f(\beta)$.

Par définition de r, on a $r \circ i(f) = y \mapsto \{b \in B \mid \exists \beta \subseteq_{\text{fin}} y.\ (\beta, b) \in i(f)\}$. Or par définition de i, on a $(\beta, b) \in i(f)$ ssi $(\beta, b) \in B$ et $b \in f(\beta)$, donc pour tout $y \in \mathcal{P}(B)$, on a

$$\begin{aligned}\{b \in B \mid \exists \beta \subseteq_{\text{fin}} y.\ (\beta, b) \in i(f)\} &= \{b \in B \mid \exists \beta \subseteq_{\text{fin}} y.\ (\beta, b) \in B \wedge b \in f(\beta))\} \\ &= \{b \in B \mid \exists \beta \subseteq_{\text{fin}} y.\ b \in f(\beta))\} \\ &= \cup_{\beta \subseteq_{\text{fin}} y} f(\beta) = f(y)\end{aligned}$$

Ainsi, $r \circ i(f) = (y \mapsto f(y)) = f$.

4. Pour tout $x \in B$ on a $i \circ r(x) = \{(\beta, b) \in B \mid b \in r(x)(\beta)\} = \{(\beta, b) \in B \mid \exists \beta' \subseteq_{\text{fin}} \beta.\ (\beta', b) \in x\}$. Soit $(\gamma, c) \in B$ et $x := \{(\gamma, c)\} \in \mathcal{P}(B)$. Alors $i \circ r(x) = \{(\beta, c) \in B \mid \gamma \subseteq_{\text{fin}} \beta\} \supsetneq x$.