λ-calcul et logique informatique

leroux@lsv.fr

Exercice 1 — Autour de l'équivalence comportementale

Un contexte est un λ-terme avec un trou, qu'on représentera par un terme spécial $[]$. L'opération de mise en contexte $C[u]$ est définie comme le remplacement *textuel* de ce trou par le terme u : contrairement à la substitution $C[[] := u]$, il est important que ce remplacement provoque la capture des variables libres de u. Par exemple, si $C = (\lambda x.\ [])$ et $C' = (\lambda y.\ [])$ alors $C[x] = (\lambda x.\ x)$ est un terme différent de $C'[x] = (\lambda y.\ x)$.

Un contexte ne contient pas forcément un unique trou : on peut avoir $C[u] = u\ u$ pour tout u (deux trous), et aussi $C[u] = v$ pour tout u (aucun trou). On peut enfin naturellement généraliser la notion de contexte à plusieurs arguments, pour parler de contextes comme $C := []_2(\lambda x.[]_1[]_2)$, qu'on notera aussi $C[][]$ ou $C[,]$. Ainsi $C[u_1][u_2] = C[u_1, u_2] = u_2(\lambda x.u_1 u_2)$ pour tout u_1 et u_2. S'il n'y a pas d'ambiguité on pourra dénoter $C[u_1, u_2]$ par $C[\vec{u}]$.

Dans cet exercice, la flèche $\to$ dénote la β-réduction.

1. Soit n un entier naturel. Définir plus formellement que dans l'énoncé les notions de contexte n-aire, i.e. contexte à n arguments, et de mise en contexte.
2. Montrer que $u \to v$ implique $C[u] \to^* C[v]$ pour tous termes u, v et contexte C.
3. Soient $u_1, \ldots, u_n$ des termes clos, $\vec{u} := (u_1, \ldots, u_n)$, un terme v, et un contexte n-aire C tel que $C[\vec{u}] \to v$. Justifier brièvement qu'exactement une des affirmations suivantes est vraie.
   (1) La réduction est dans C : v peut s'écrire $C'[\vec{u}]$ tel que pour tout tuple $\vec{t}$ de termes clos, on a $C[\vec{t}] \to C'[\vec{t}]$.
   (2) La réduction est dans un certain u_i : il existe un contexte $(n+1)$-aire C' tel que $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i]$ pour tout $\vec{t}$, et $v = C'[\vec{u}, u']$ avec $u_i \to u'$.
   (3) Il existe un contexte $(n+1)$-aire C' tel que pour tout $\vec{t}$, il existe $w_{\vec{t}}$ tel que $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i\ w_{\vec{t}}]$, et $u_i = (\lambda x.\ u')$, et $v = C'[\vec{u}, u'[x := w_{\vec{u}}]]$.
4. Montrer par un exemple que l'hypothèse de clôture des termes dans l'affirmation (1) ci-dessus est utile.

On dit que deux termes u et v sont *séparables* s'il existe un contexte C tel que $C[u] \to^* T := \lambda xy.x$ et $C[v] \to^* F := \lambda xy.y$.

5. Soient u et v deux termes séparables. Montrer que pour tout termes A, B, il existe un contexte C tel que $C[u] \to^* A$ et $C[v] \to^* B$.
6. Montrer que la séparabilité est une relation irréflexive et symétrique.
7. Montrer que $(\lambda f \lambda x.\ f\ x)$ et $(\lambda f \lambda x.\ f\ (f\ x))$ sont séparables.
8. Soit $\Omega := (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ et $I := \lambda x.x$. Montrer que si $C[\Omega] \to^* t$ avec t en forme normale, alors pour tout u clos on a aussi $C[u] \to^* t$. En déduire que I et Ω sont inséparables.
9. Existe-t-il un terme dont Ω est séparable ?

On écrit $u \downarrow_\beta$ quand u normalise faiblement pour la β-réduction, *i.e.*, $u \to^* t$ avec t sans β-redex. On dit que u et v sont en *équivalence comportementale*, noté $u \approx v$, si pour tout contexte C on a $C[u] \downarrow_\beta$ ssi $C[v] \downarrow_\beta$. De façon évidente, $\approx$ est une relation d'équivalence et une congruence, et deux termes α-équivalents sont en équivalence comportementale.

10. Montrer que $\to$ est contenue dans $\approx$.
11. Soient u, v tels que $u \to^* \lambda x.\ v$. Montrer $u \approx (\lambda y.\ u\ y)$ pour $y \notin \mathrm{FV}(u)$.
12. Montrer qu'un terme est résoluble (i.e. a une forme normale de tête) ssi sa réduction de tête termine.
13. Montrer que si v n'est pas résoluble alors, pour toute substitution θ, $v\theta$ n'est pas résoluble.
14. Démontrer $u \not\approx v$ pour u résoluble et v non résoluble.
15. On montre finalement que l'équivalence comportementale est strictement incluse dans l'inséparabilité :
    (a) Donner deux termes t et t' inséparables mais tels que $t \not\approx t'$.
    (b) Montrer que si u et v sont séparables alors ils ne sont pas en équivalence comportementale.

Solution exercice 1

1. Soit n un entier naturel et $\mathcal{V}$ un ensemble de variables. On note $N := \{1, \ldots, n\}$
   Les contextes n-aires sont définis par récurrence par $\mathcal{C} := \mathcal{V} \mid []_N \mid \mathcal{C}\mathcal{C} \mid \lambda\mathcal{V}.\mathcal{C}$.
   Soit $u_1, \ldots, u_n$ des termes et $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. Alors $C[\vec{u}]$ est défini par récurrence sur le contexte C.
   — $x[\vec{u}] := x$ pour tout $x \in \mathcal{V}$.

- $[]_i[\vec{u}] := u_i$ pour tout $i \in N$.
- $(AB)[\vec{u}] := A[\vec{u}]B[\vec{u}]$ pour tout contextes A, B.
- $(\lambda x.A)[\vec{u}] = \lambda x.(A[\vec{u}])$ pour tout contexte A et variable x.

2. Par récurrence sur C.
   - Cas (de base) où C est une variable x. Alors $C[u] = C[v] = x$, donc $C[u] \to^* C[v]$.
   - Cas (de base) où $C = []$. Alors $C[u] = u$ et $C[v] = v$, donc $u \to v$ implique $C[u] \to C[v]$, puis $C[u] \to^* C[v]$.
   - Cas où $C = \lambda x.A$ où A est un contexte. Par HR $A[u] \to^* A[v]$, donc par un lemme vu dans un TD précédent, $\lambda x.(A[u]) \to^* \lambda x.A[v]$. Or par la définition de la mise en contexte on a $\lambda x.(A[u]) = (\lambda x.A)[u]$ et $\lambda x.(A[v]) = (\lambda x.A)[v]$, donc $C[u] \to^* C[v]$.
   - Cas où $C = AB$ où A et B sont des contextes. Par HR $A[u] \to^* A[v]$ et $B[u] \to^* B[v]$, donc par un lemme vu dans un TD précédent, $A[u]B[u] \to^* A[v]B[v]$. Or par la définition de la mise en contexte on a $A[u]B[u] = (AB)[u]$ et $A[v]B[v] = (AB)[v]$, donc $C[u] \to^* C[v]$.
3. Soit $(\lambda x.A)B$ l'occurence du rédexe qui est réduit.
   - Si le λ en question fait partie de C, alors on est dans la situation (1).
   - On traite maintenant les cas où le λ vient d'un u_i. Si le B fait aussi partie du u_i, alors on est dans la situation (2).
   - Sinon, le B fait partie de $C[\vec{u}_{-i}] = C[u_1]\dots[u_{i-1}][][u_{i+1}]\dots[u_n]$ et on est dans la situation (3).
4. Soit $I := \lambda x.x$, et $C := (\lambda y.[])z$. Alors $C[I] \to I = C'[I]$ avec $C' := []$, mais $C[y] \not\to y$. On a seulement $C[y] \to z$.
5. Soit $C[]$ tel que $C[u] \to^* T := \lambda xy.x$ et $C[v] \to^* F := \lambda xy.y$. Soient A et B deux termes et $C'[] := C[]AB$. Alors $C'[u] \to^* A$ et $C'[v] \to^* B$.
6. Irréflexive par confluence. Symmétrique par la question précédente avec $A := F$ et $B := T$.
7. Soit $\overline{U}$ un terme calculant le test d'égalité à $\overline{1}$ dans les entiers de Church. Le contexte $C[] := \overline{U}[]TF$ sépare bien $\overline{1}$ et $\overline{2}$.
8. Par récurrence bien fondé sur $\to^*$.
   - Cas $n = 0$. On a $C[\Omega]$ est normal, donc le context est sans trou, donc $C = t$. Donc $C[u] = t$ pour tout terme u.
   - Cas inductif. Soit $C[\Omega] \to^{n+1} t$. Donc plus précisément il existe un terme v tel que $C[\Omega] \to v \to^n t$. Comme Ω n'est pas une λ-abstraction, exactement une des affirmations suivantes est vraie, d'après une question précédente.
     (1) La réduction est dans C : v peut s'écrire $C'[\Omega]$ tel que $C[\Omega] \to C'[\Omega]$, et pour tout terme u on a $C[u] \to C'[u]$.

ou (2) La réduction est dans une occurence de Ω : $v = C[\Omega]$.

Dans le premier cas ci-dessus, on a $C'[u] \to^* t$ par HR, donc $C[u] \to^* t$. Dans le deuxième cas, $v = C[\Omega] \to^n t$, donc par HR on a $C[u] \to^* t$.

On en déduit que Ω et I (ou n'importe quel terme clos) sont inséparables.

9. Il n'en existe probablement pas.
10. Soit $u \to v$, alors $C[u] \to^* C[v]$ d'après une question précédente.
    - Soit C tel que $C[v] \to^* t$ avec t normal, d'où $C[u] \to^* t$ par transitivité de $\to^*$.
    - Réciproquement, soit C tel que $C[u] \to^* t$ avec t normal. Alors par confluence, il existe t' tel que $C[v] \to^* t'$ et $t \to^* t'$. Or t est normal, donc $t' = t$.
11. On a $\lambda y.uy \to^* \lambda y.(\lambda x.v)y \to \lambda y.(v[x := y]) =_\alpha u$ (car $y \notin FV(u)$), donc $u \approx \lambda y.uy$ par récurrence sur la question précédente.
12. Si la réduction de tête de v termine alors v a une forme normale de tête. On se concentre donc sur la réciproque. Supposons que $v \to^* v' = \lambda x_1 \dots x_n.xv_1...v_m$ (forme normale de tête). Alors, comme $\to^*$ coïncide avec $\Rightarrow_s$ par le théorème de standardisation, on a $v \Rightarrow_s v'$. La définition de $\Rightarrow_s$ implique que $v \to_t^* \lambda x_1 \dots x_n.xu_1 \dots u_m$ (avec $u_i \Rightarrow_s v_i$ pour tout i, mais ce n'est pas important). Donc la réduction de tête de v arrive sur $\lambda x_1 \dots x_n.xu_1 \dots u_m$, qui est une forme normale de tête, et donc la réduction de tête s'arrête là.
13. Soit θ une substitution. On montre par récurrence sur u que $u \to_t u'$ implique $u\theta \to_t u'\theta$.
    - Si u est une variable u ne se réduit pas.
    - Cas où $u = \lambda x.v$. Alors $u' = \lambda x.v'$ avec $v \to_t v'$. Par HR $v\theta \to_t v'\theta$, donc $\lambda x.(v\theta) \to_t \lambda x.(v'\theta)$. Or $\lambda x.(v\theta) = (\lambda x.v)\theta$ et $\lambda x.(v'\theta) = (\lambda x.v')\theta$, donc $(\lambda x.v)\theta \to_t \lambda x.(v'\theta)$.
    - Cas où $u = AB$. Alors $v' = A'B$ avec $A \to_t A'$. Par HR, $A\theta \to_t A'\theta$, donc $(A\theta)(B\theta) \to_t (A'\theta)(B\theta)$, d'où $(AB)\theta \to_t (A'B)\theta$.

    Ainsi, si v n'est pas résoluble, alors sa réduction de tête ne termine pas (par la question précédente), donc celle de $v\theta$ non plus par le résultat ci-dessus, donc $v\theta$ n'est pas résoluble (par la question précédente).
14. À faire.
15. (a) Ω et n'importe quel terme clos faiblement normalisant convient, par exemple I. Ils sont inséparables par une question ci-dessus, et il ne sont pas équivalents comme en témoigne le contexte identité.

    (b) D'après une question ci-dessus, soit C tel que $C[u] \to^* T$ et $C[v] \to^* \Omega$. Ainsi $u \not\approx v$.