λ-Calcul et Logique Informatique

leroux@lsv.fr

Exercice 1 — Paradoxe de Russell

On formalise (une partie de) la théorie naïve des ensemble en ajoutant à la logique du premier ordre les constructions suivantes :

- les termes du premier-ordre $\{ x \mid F \}$ représentant intuitivement un ensemble défini par compréhension ;
- les formules $t \in s$ représentant intuitivement l'appartenance ;
- les termes de preuve $I_\in$ et $E_\in$ pour introduire et éliminer les types $\in$;
- les règles de typage suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash u : F[x := t]}{\Gamma \vdash I_\in(u) : t \in \{ x \mid F \}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : t \in \{ x \mid F \}}{\Gamma \vdash E_\in(u) : F[x := t]}$$

- et enfin la nouvelle réduction $E_\in(I_\in(u)) \to u$.

Nous allons formaliser le paradoxe de Russell (aussi appelé paradoxe du menteur) dans ce système, et ainsi montrer son incohérence. Pour cela, on pose $S := \{ x \mid \neg(x \in x) \}$.

1. Donner un terme de type $(S \in S) \Rightarrow \neg(S \in S)$.
2. En déduire un terme de type $S \in S$ et un terme de type $\perp$.
3. Ce terme vous rappelle-t-il quelque chose ? Réduisez-le au besoin.

Exercice 2 — Connecteurs logiques dans le système $\mathcal{F}$

On rappelle les règles de typage pour la nouvelle construction du système $\mathcal{F}$, la quantification du second ordre. On note en majuscule les variables de type, et on suppose que la variable X n'apparaît pas libre dans Γ.

$$\frac{\Gamma \vdash u : F}{\Gamma \vdash \lambda X.\ u : \forall X.\ F} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \forall X.\ F}{\Gamma \vdash u\ T : F[X := T]}$$

1. On pose $\perp \stackrel{\text{def}}{=} \forall X.\ X$. Démontrer $\perp \Rightarrow P$ pour un type / une formule quelconque P.
2. On pose $A \wedge B \stackrel{\text{def}}{=} \forall X.\ (A \Rightarrow B \Rightarrow X) \Rightarrow X$. Montrer que cet encodage rend admissibles les règles usuelles de la conjonction, en donnant les encodages correspondants pour les constructions de paire et projections :

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \quad \Gamma \vdash v : B}{\Gamma \vdash \langle u, v \rangle : A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A_1 \wedge A_2}{\Gamma \vdash \pi_i(u) : A_i}$$

3. On pose $A \vee B \stackrel{\text{def}}{=} \forall X.\ (A \Rightarrow X) \Rightarrow (B \Rightarrow X) \Rightarrow X$. Dériver les règles usuelles :

$$\frac{\Gamma \vdash u : A_i}{\overline{\Gamma \vdash \iota_i(u) : A_1 \vee A_2}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \vee B \quad \Gamma, x_1 : A \vdash v_1 : C \quad \Gamma, x_2 : B \vdash v_2 : C}{\overline{\Gamma \vdash \text{case}(u, x_1.v_1, x_2.v_2) : C}}$$

4. Proposer un encodage de $\exists X.\ F$ qui permette de dériver les règles suivantes (où on suppose que X n'apparaît pas dans Γ et P).

$$\frac{\Gamma \vdash u : F[X := T]}{\overline{\Gamma \vdash \langle\langle T, u\rangle\rangle : \exists X.\ F}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \exists X.\ F \quad \Gamma, x : F \vdash v : P}{\overline{\Gamma \vdash \text{CASE}(u, x.v) : P}}$$

Remarque : on pourrait aussi vérifier que les réductions attendues (par exemple, $\text{case}(\iota_i(u), x_1.v_1, x_2.v_2) \to v_i[x_i := u]$) sont simulées par nos encodages.

Solution exercice 1

1. Soit F le terme $\neg(x \in x)$, donc $F[x := S]$ est le terme $\neg(S \in S)$. On a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y : S \in S \vdash y : S \in S}}{y : S \in S \vdash E_\in(y) : F[x := S]}}{\vdash \lambda y.E_\in(y) : (S \in S) \Rightarrow \neg(S \in S)}$$

2. Soit u le terme $\lambda y.E_\in(y)$ de la question précédente. Par affaiblissement du typage précédent, on a $z : S \in S \vdash u : (S \in S) \Rightarrow \neg(S \in S)$, donc on en dérive, en particulier par deux applications successives,

$$\dfrac{\dfrac{z : S \in S \vdash uzz : \bot}{\vdash \lambda z.uzz : \neg(S \in S)}}{\vdash I_\in(\lambda z.uzz) : S \in S}$$

   Soit v le terme $I_\in(\lambda z.uzz)$. On a $\vdash uvv : \bot$.

3. On a $uvv \to E_\in(v)v \to (\lambda z.uzz)v \to uvv$. En particulier, la structure de $E_\in(v)v$ ressemble à celle de $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$.

Solution exercice 2

1. De $x : \forall X.X \vdash x : \forall X.X$ on dérive $x : \forall X.X \vdash xP : P$ par la règle de droite ci-dessus, avec $F := X$ et $T := P$. Ainsi $\vdash \lambda x.xP : \bot \Rightarrow P$ par λ-abstraction.

2. — La paire : on a $\Gamma, y : A \Rightarrow B \Rightarrow X \vdash y : A \Rightarrow B \Rightarrow X$, où y n'apparaît pas dans Γ. On suppose $\Gamma \vdash u : A$ et $\Gamma \vdash v : B$. Donc par affaiblissement et deux applications successives, on trouve $\Gamma, y : A \Rightarrow B \Rightarrow X \vdash yuv : X$, d'où $\Gamma \vdash \lambda y.yuv : (A \Rightarrow B \Rightarrow X) \Rightarrow X$. Par la règle gauche ci-dessus, on obtient $\Gamma \vdash \lambda X \lambda y.yuv : \forall X.(A \Rightarrow B \Rightarrow X) \Rightarrow X$. On construit alors la paire en posant $\langle u, v\rangle := \lambda X \lambda y.yuv$, où y n'est pas libre dans uv.

- Les projections : De $\Gamma \vdash u : A \wedge B$, on dérive $\Gamma \vdash uA : (A \Rightarrow B \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (et $\Gamma \vdash uB : (A \Rightarrow B \Rightarrow B) \Rightarrow B$). Par une dérivation simple, on trouve $\vdash \lambda xy.x : A \Rightarrow B \Rightarrow A$ (et $\vdash \lambda xy.y : A \Rightarrow B \Rightarrow B$). Ainsi par application, $\Gamma \vdash uA(\lambda xy.x) : A$ (et $\Gamma \vdash uB(\lambda xy.y) : B$)). On pose alors $\pi_1(u) := uA(\lambda xy.x)$ (et $\pi_2(u) := uB(\lambda xy.y)$), ce qui dépend clairement des types A et B.

3. — L'introduction du ou : de $\Gamma \vdash u : A$, on déduit $\Gamma, a : A \Rightarrow X, b : B \Rightarrow X \vdash au : X$, puis $\Gamma \vdash \lambda X \lambda ab.au : \forall X.(A \Rightarrow X) \Rightarrow (B \Rightarrow X) \Rightarrow X$. On pose alors $\iota_1(u) := \lambda X \lambda ab.au$. De manière similaire, on pose $\iota_2(u) := \lambda X \lambda ab.bu$. On remarque que cela dépend encore des types A et B.
   - Le "case" : On suppose $\Gamma \vdash u : A \vee B$ et $\Gamma, a : A \vdash v : C$ et $\Gamma, b : B \vdash w : C$. On en déduit, respectivement, $\Gamma \vdash uC : (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$ et $\Gamma \vdash \lambda a.v : A \Rightarrow C$ et $\Gamma \vdash \lambda b.w : B \Rightarrow C$. Par deux applications successives, on obtient $\Gamma \vdash uC(\lambda a.v)(\lambda b.w) : C$. On pose alors $case(u, a.v, b.w) := uC(\lambda a.v)(\lambda b.w)$.

4. De $\Gamma, x : \forall X.F \Rightarrow P \vdash x : \forall X.F \Rightarrow P$ on déduit $\Gamma, x : \forall X.F \Rightarrow P \vdash xT : (F \Rightarrow P)[X := T]$. Or X n'apparaît pas dans P, donc $\Gamma, x : \forall X.F \Rightarrow P \vdash xTu : P$, puis $\Gamma \vdash \lambda x.xTu : (\forall X.F \Rightarrow P) \Rightarrow P$, et finalement $\Gamma \vdash \lambda P \lambda x.xTu : \forall P.(\forall X.F \Rightarrow P) \Rightarrow P$. On pose alors $\exists X.F := \forall P.(\forall X.F \Rightarrow P) \Rightarrow P$ et $\langle\langle T, u \rangle\rangle := \lambda P \lambda x.xTu$. Ça ressemble à l'encodage de la question précédente : un quantificateur existentiel peut être vu comme un ou généralisé.