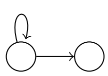
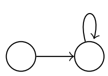
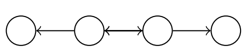
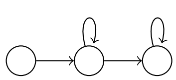
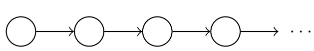
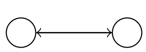
λ-calcul et logique informatique

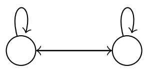
leroux@lsv.fr

Exercice 1
Parmi les termes suivants, indiquer lesquels sont α-équivalents et lesquels sont β-équivalents :

1. $(\lambda x.\ \lambda y.\ x)\ x$
2. $\lambda x.\ x$
3. $(\lambda x.\ \lambda x.\ x)\ x$
4. $(\lambda x.\ \lambda y.\ y)\ x$
5. $(\lambda x.\ \lambda y.\ y)\ (\lambda x.\ x)$

Exercice 2 (Graphes de réduction)
Pour chacun des graphes suivants, trouver un λ-terme qui a pour graphe de réduction ce graphe (si possible) ou alors expliquer pourquoi c'est impossible :

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 

8. 

Exercice 3 (Booléens)
On code les booléens comme des projections dans le λ-calcul :

$$\begin{array}{rcl} [\top] & = & \lambda x.\lambda y.x \\ [\bot] & = & \lambda x.\lambda y.y \end{array}$$

Donner les encodages de la conjonction, la disjonction et la négation. Formellement, on cherche par exemple un terme A tel que $A\ [b]\ [b'] = [b \wedge b']$ pour tous booléens b et b'.

Exercice 4

1. Caractériser les termes M et N clos et β-normaux qui rendent l'équivalence vraie :
$$(\lambda x.\ \lambda y.\ M\ x) =_\beta (\lambda x.\ \lambda y.\ N\ y)$$
2. Donner une infinité de termes M clos et β-normaux tels que :
$$(\lambda z.\ \lambda s.\ s\ (M\ s\ z)) =_\beta (\lambda z.\ \lambda s.\ M\ s\ (s\ z))$$

Solutions exercice 1
— 3 et 4 sont α-équivalents, mais 3 ne respecte pas la convention de nommage.
— 2,3,4,5 sont β-équivalents.
Solutions exercice 2
— $\Omega := \omega\omega$, avec $\omega := \lambda x.xx$.
— $(\lambda x.y)\Omega$, où y est une variable.
— $(\lambda x.x\omega)\omega$
— Impossible par la confluence.
— $(\lambda x.x\omega(xy))\omega$, où y est une variable.
— MM où $M := \lambda x.xxx$ (et $xxx = (xx)x$).
— MzM (i.e. $((Mz)M)$), où $M := \lambda yx.xzx$ (ou $M := \lambda yx.xyx$) et z est une variable.
— Comme ci-dessus, en replaçant z par Ω.
Solutions exercice 3

— Soit $[\neg] := \lambda bzt.btz$. On note $[\neg][\top] = (\lambda bzt.btz)\lambda xy.x \to_\beta \lambda zt.(\lambda xy.x)tz \to_\beta^2 \lambda zt.t = [\bot]$.
— Soit $[\wedge] := \lambda zt.zt[\bot]$. Ainsi, par exemple, $[\wedge][\top]b \to_\beta (\lambda t.[\top]t[\bot])b \to_\beta [\top]b[\bot] \to_\beta^2 b$.
— Soit $[\vee] := \lambda zt.z[\top]t$. Ainsi, par exemple, $[\vee][\bot]b \to_\beta^* b$.

Solutions exercice 4

1. Mx et Ny doivent se réduire de manière à faire disparaître x et y, car deux termes ayant des variables libres différentes ne peuvent pas être égaux. Donc M et N sont des λ-abstractions. I.e. M est de la forme $\lambda z.P$ et N de la forme $N = \lambda z.Q$.

   Si z est libre dans P, alors x est libre dans $P[z := x]$, ce qui rendrait l'égalité impossible, là encore car la réduction de Ny ne peux pas faire apparaître de x libre. Ainsi, z n'est pas libre dans P. De même z n'est pas libre dans Q. Or M et N sont clos, donc P et Q aussi.

   De plus P et Q sont β-normaux car M et N le sont. Pour avoir β-équivalence comme demandé, on doit donc avoir $P = Q$. Ces contraintes sont par ailleurs suffisantes.

   On trouve ainsi que les solutions sont de la forme $M = N = \lambda z.P$ avec P clos et β-normal. Réciproquement, tous les candidats de cette forme sont solutions.

2. On remarque que $M_0 := \lambda xy.xy$ convient. De même $M_1 := \lambda xy.x(xy)$. Plus généralement, soit $P_0(x, y) := xy$ et pour tout entier naturel n on pose $P_{n+1}(x, y) := xP_n(x, y)$. On peut montrer par récurrence sur n que $P_n(x, xy) = P_{n+1}(x, y)$

   Soit $M_n := \lambda xy.P_n(x, y)$. Alors $s(M_n sz) \to_\beta sP_n(s, z) = P_{n+1}(s, sz)$ et $M_n s(sz) \to_\beta P_n(s, sz) = P_{n+1}(s, z)$.

   De plus, les M_n sont clos, normaux, et distincts deux-à-deux.