Chapitre VIII : combinatoire finie-infinie

Stéphane Le Roux stephane.le_roux@ens-paris-saclay.fr

ENS Paris-Saclay

2023-2024

Un peu de combinatoire

- - Une partie de la combinatoire : trouver des bijections pour dire que le nombre d'objets est le même à droite qu'à gauche.
  - $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ se prouve bien par récurrence sur n ; et se comprend mieux par une preuve combinatoire (en TD)
- Principe des tiroirs (Pigeonhole principle)
  - Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $f : [n] \to [m]$. Si $m < n$, alors f n'est pas injective.
  - Applications variées du principe des tiroirs : Lemme de l'étoile (Pumping Lemma), lemme d'Erdös dans quelques pages, la prochaine page, etc.

Formule du crible /principe d'inclusion-exclusion

- Soient deux ensembles finis E et F.
  - $E \cap F = \emptyset \Rightarrow |E \cup F| = |E| + |F|$.
  - En général, $|E \cup F| = |E| + |F| - |F \cap E|$
- $|E \cup F \cup G| =?$
  $|E| + |F| + |G| - (|E \cap F| + |E \cap G| + |F \cap G|) + |E \cap F \cap G|$.
- Principe d'inclusion-exclusion :

$$\left|\bigcup E\right| = \sum_{\emptyset \neq F \subseteq E} (-1)^{|F|+1} \quad \left|\bigcap F\right|$$

Autres résultats de cardinalité

- On a $\mid E \times F \mid = \mid E \mid \cdot \mid F \mid$. Bijection $[n] \times [m] \to [nm]$, $(i,j) \mapsto (i-1)m + j$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$, deux familles d'ensembles $(E_i)_{i \in [n]}$ et $(F_i)_{i \in [n]}$. Si E_i et F_i sont en bijection pour tout $i \in [n]$, alors $\prod_{i \in [n]} E_i$ et $\prod_{i \in [n]} F_i$ sont aussi en bijection.
- $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$
-
    - Si E et F sont finis, alors F^E est fini de cardinal $|F|^{|E|}$.
    - Une fonction booléenne est du type $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Il y a 2^{2^n} fonctions de ce type.
-
    - Une bijection d'un ensemble fini dans lui-même est appelée une permutation.
    - Il y a $n!$ permutations de $[n]$ (Preuve par récurrence en TD).

Coefficients binomiaux

Soit E un ensemble fini et $n := |E|$.

Définition

$\binom{n}{k}$ est le cardinal de l'ensemble des parties de E de cardinal k, i.e. le nombre de sous-ensembles de E de cardinal k.

Remarque

Si $k < 0$ ou $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

On donnera la formule de $\binom{n}{k}$ tout à l'heure, pour l'instant on mentionne plusieurs propriétés que cette quantité vérifie.

Proposition

- $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Triangle de Pascal

Proposition (liée au triangle de Pascal)

Pour $n \geq 1$ on a $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

Preuve intuitive.

Il y a deux types de parties de $[n]$ de cardinal k: celles qui contiennent n et les autres. $\square$

Proposition

Pour $0 < k \leq n$ on a $\binom{n}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j-1}{k-1}$

Preuves

- Intuitive : on partitionne les parties de $[n]$ de cardinal k (donc non vides) en fonction de leur plus grand élément (dans $[\![k, n]\!]$).
- Formelle : par récurrence en utilisant la première proposition (triangle de Pascal).

Identité de Vandermonde

Identité de Vandermonde

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{\substack{0\leq i\leq m \\ 0\leq k-i\leq n}} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

La première somme est restreinte aux termes non nuls.

Preuve intuitive.

Soient E et F disjoints tels que $|E| = m$ et $|F| = n$ et $|E \cup F| = m + n$. Choisir une partie de $E \cup F$ de cardinal k revient a choisir d'abord $i \in [\![1, k]\!]$, puis une partie de E de cardinal i et une partie de F de cardinal $k - i$ (et d'en faire l'union). $\square$

La formule des coefficients binomiaux

Proposition

$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Preuve intuitive

Choisir un comité de k personnes dont une présidente parmi n personnes revient à

1. choisir d'abord les k personnes puis la présidente parmi elles, ou bien
2. choisir d'abord la présidente parmi n personne, puis les $k-1$ autres membres du comité.

Corollaire

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ par récurrence sur k, ou
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N},\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ par récurrence sur n.

La formule confirme que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Un lemme d'Erdös

Lemma

Soit $(x_i)_{i \in [\![1, n^2+1]\!]}$ *une suite d'entiers naturels. Alors, il en existe une sous-suite de taille* $n+1$ *qui est croissante ou décroissante.*

Proof.

Soit c_i (d_i) la taille de la plus longue sous-suite croissante commençant (décroissante terminant) en i. Par l'absurde, supposons que $c_i, d_i \leq n$ pour tout i. L'application $i \mapsto (c_i, d_i)$ de $[\![1, n^2+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]^2$ est donc bien définie. Par le principe des tiroirs, elle n'est pas injective. Ainsi, soient $i < j$ tels que $(c_i, d_i) = (c_j, d_j)$.
Si $x_i \leq x_j$, soit $x_{\varphi(1)}, \dots x_{\varphi(c_j)}$ une sous-suite croissante de taille c_j et commençant en x_j, i.e. $j = \varphi(1)$. La sous-suite $x_i, x_{\varphi(1)}, \dots x_{\varphi(c_j)}$ est croissante de taille $c_j + 1 > c_i$, contradiction.
Si $x_j < x_i$, un raisonnement similaire avec les suites décroissantes mène à une contradiction. $\square$

Petite généralisation en TD.

Multi-ensembles finis

Multi-ensemble fini

Soit E un ensemble. Un multi-ensemble fini de E est une fonction $M : E \to \mathbb{N}$ telle que $\sum_{x \in E} M(x) < +\infty$. Cette somme est appelée le cardinal de M. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [n]$, soit $\left(\binom{n}{k}\right)$ le nombre de mutli-ensembles de $[n]$ de cardinal k.

Proposition

$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$

Multi-ensembles finis (II)

Proposition

$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

Proof.

Les sous-ensembles de $[n]$ de taille k sont en bijection avec les suites $a_1, \ldots, a_k$ telles que $1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq n$.
C'est toujours vrai en remplaçant n par $n+k-1$ ci-dessus.
Les multi-ensembles finis de $[n]$ de taille k sont en bijection avec les suites $b_1, \ldots, b_k$ telles que $1 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_k \leq n$.
Soit $f : (b_i)_i \mapsto (b_i + i - 1)_i$. On a $1 \leq b_1 + 1 - 1$, $b_i + i - 1 < b_{i+1} + i$ et $b_k + k - 1 \leq n + k - 1$.
Soit $g : (a_i)_i \mapsto (a_i - i + 1)_i$. On a $1 \leq a_i - 1 + 1$, $a_i - i + 1 \leq a_{i+1} - i$ et $a_i - k + 1 \leq n$.
Notons que $g = f^{-1}$.

$\square$

Comptage d'applications

Partitions

On note $S(n,k)$ le nombre de partitions de $[n]$ de cardinal k.

Le problème

Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On cherche à compter les applications $f : [k] \to [n]$ qui sont arbitraires, injectives, surjectives.
On se pose aussi ce problème quand les éléments de $[k]$ ou $[n]$ sont indiscernables.

$[k]$	discernable	indiscernable	discernable
$[n]$	discernable	discernable	indiscernable
f arbitraire	n^k	$\left(\binom{n}{k}\right)$	$\sum_{i=1}^{n} S(k,i)$
f injective	$n \dots (n-k+1)$	$\binom{n}{k}$	$\delta_{k \leq n}$
f surjective	$n! S(k,n)$	$\left(\binom{n}{k-n}\right)$	$S(k,n)$

Similitudes entre les ensembles finis et infinis ?

Un lemme d'Erdös (rappel)

Soit $(x_i)_{i \in [\![1, n^2+1]\!]}$ une suite d'entiers naturels. Alors, il existe une sous-suite de taille $n+1$ qui est croissante ou décroissante.

Version infinie du lemme ci-dessus

Pour toute suite d'entiers relatifs (i.e. dans $\mathbb{Z}$), il existe une sous-suite infinie soit strictement croissante, soit constante, soit strictement décroissante.

Proof.

Si la suite n'a pas de borne supérieure, on peut en extraire une sous-suite strictement croissante. Si la suite n'a pas de borne inférieure, on peut en extraire une sous-suite strictement décroissante. Sinon, la suite est bornée, donc il existe une valeur qui revient un nombre infini de fois, ce qui donne une sous-suite constante. $\square$

Arbres

Arbres

Soit Σ un ensemble non-vide qu'on appelle alphabet.

- Σ^* dénote l'ensemble des mots (suites) finis sur Σ.
- Un arbre A sur Σ est une partie non-vide de Σ^* qui est close par préfixe, i.e. pour toute lettre $a \in \Sigma$ et mot $w \in \Sigma^*$, si $wa \in A$ alors $w \in A$. (En particulier, le mot vide appartient à tous les arbres.)
- Si pour tout $w \in A$ il existe seulement un nombre fini de $a \in \Sigma$ tels que $wa \in A$, on dit que le branchement de A est fini.
- Une branche infinie de A est un mot infini $a_0 a_1 a_2 \cdots \in A^{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $n \in N$, le mot fini $a_0 a_1 \dots a_n \in A$.

Axiome du choix dépendant : soit R une relation binaire sur un ensemble A. Supposons que pour tout $a \in A$ il existe $b \in A$ tel que aRb. Alors il existe une ω-suite $\langle a_n : n < \omega \rangle$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n R a_{n+1}$.

Lemme de König

Lemme de König (en supposant l'axiome du choix dépendant)

Tout arbre infini à branchement fini a une branche infinie.

Proof.

- Pour tout $u \in A$, soit $D(u) := \{v \in A \mid u \sqsubseteq v\}$. (On note que $D(\epsilon) = A$.) On écrit uEv si $u \sqsubseteq v \in A$ et $|u| + 1 = |v|$. On note que uE est fini pour tout $u \in A$ (branchement fini). On a $D(u) = \{u\} \cup (\cup_{v \in uE} D(v))$. Soit $I := \{u \in A \mid D(u) \text{ est infini } \}$. Soit $u \in I$. Comme $D(u) = \{u\} \cup \cup_{v \in uE} D(v)$ et uE est fini, il existe $v \in uE$ tel que $v \in I$.
- Soit R la restriction de E à I. Par axiome du choix dépendant, il existe une suite $\langle u_n : n < \omega \rangle$ telle que $u_n R u_{n+1}$ pour tout $n < \omega$. On a $u_n \in A$ et $u_n E u_{n+1}$ pour tout $n < \omega$.
- Pour tout $n < \omega$, soit a_n la dernière lettre de u_{n+1}. Soit $\rho := u_0 a_0 a_1 \cdots \in \Sigma^\omega$. On peut montrer par récurrence sur la longueur des préfixes finis de ρ qu'ils sont tous dans A. Le mot ρ est donc une branche de A.

Tuiles de Wang

Définition

- Une tuile de Wang est un carré (unité) dont chacun des côtés a une couleur.
- Paver $[-n, n]^2$ consiste à placer une tuile sur chaque $[i, i+1] \times [j, j+1]$ pour $-n \leq i, j < n$.
- Un tel pavage est valide si tous côtés de tuile qui se touchent ont la même couleur.

Théorème

Soit un ensemble fini de tuiles de Wang. Si, utilisant seulement (des copies) des tuiles de cet ensemble, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un pavage valide de $[-n, n]^2$, alors il existe un pavage valide du plan entier.

Tuiles de Wang

Proof.

On construit un arbre A dont les noeuds à profondeur n sont les pavages valides (PV) de $[-n, n]^2$. Le parent d'un PV de $[-n-1, n+1]^2$ est sa restriction à $[-n, n]^2$, également PV de $[-n, n]^2$.

- D'une part, A a un nombre infini de noeuds par hypothèse.
- D'autre part, le branchement de A est fini, car le nombre de noeuds à profondeur n est bornée par le nombre de PV de $[-n, n]^2$, qui est fini car le jeu de tuile est fini.
- Donc par König, A a un chemin infini, i.e. une suite de PV $P_0 P_1 P_2 \dots$ de tous les $[-n, n]^2$ qui sont des restrictions les uns des autres.

On définit le pavage du plan dont la restrition à $[-n, n]^2$ est P_n. S'il n'était pas valide, il existerait un n tel que sa restriction à $[-n, n]^2$ ne soit pas valide, contradiction. $\square$

Théorèmes de Ramsey

Théorème infini de Ramsey

Soient X un ensemble infini, $(m, c) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ et $f : \mathcal{P}_m(X) \to [\![1, c]\!]$, où $\mathcal{P}_m(X)$ est l'ensemble des parties de X de cardinal m. Alors il existe Y une partie infinie de X telle que $|f[\mathcal{P}_m(Y)]| = 1$

Corollaires

- De toute suite dans $\mathbb{Z}$ on peut extraire une sous-suite, soit strictement croissante, soit constante, soit strictement décroissante. (Rappel)
- (TD ?) Soient E un ensemble infini de $\mathbb{N}^2$. Il existe soit une droite soit une fonction strictement croissante et strictement convexe ou concave passant par un nombre infini de points de E.

Théorème fini de Ramsey **(se déduit du cas infini)**

$\forall c, m, s \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout coloriage parmi c couleurs des parties de $[n]$ de cardinal m, il existe une partie S de $[n]$ de cardinal s telle que les parties de S de cardinal m ont toutes la même couleur.

Théorème de Ramsey fini

Proof.

Vers une contradiction, supposons qu'il existe $c, m, s \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un coloriage invalidant, i.e. que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\emptyset \neq \Gamma_n := \{f : \mathcal{P}_m([n]) \to [c] \mid \forall S \in \mathcal{P}_s([n]), |f[\mathcal{P}_m(S)]| > 1\}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, f \in \Gamma_{n+1} \Rightarrow f|_{\mathcal{P}_m([n])} \in \Gamma_n$. Soit l'arbre dont les noeuds à profondeur n sont les coloriages dans Γ_n et le parent d'un coloriage de Γ_{n+1} est sa restriction à $[n]$. C'est un arbre infini, car tous les Γ_n sont non-vides ; à branchement fini, car le nombre de noeuds possibles à profondeur n est bornée par le nombre total de coloriages de $[n]$. Par le lemme de König, cet arbre a un chemin infini, i.e. une suite de coloriages invalidants $f_0 f_1 f_2 \dots f_n \dots$ des $[n]$ qui sont des extensions successives. On peut en tirer un coloriage $F : \mathcal{P}_m(\mathbb{N}) \to [c]$ dont la restriction aux parties de $[n]$ est f_n. On a $\forall M \in \mathcal{P}_m(\mathbb{N})$, $F(M) := f_{\max M}(M)$.
Par le théorème infini de Ramsey, soit Y une partie infinie de $\mathbb{N}$ telle que $|F[\mathcal{P}_m(Y)]| = 1$. Soit n tel que $|Y \cap [n]| = s$. On a $f_n[\mathcal{P}_m(Y \cap [n])] \subseteq F[\mathcal{P}_m(Y)]$, donc $|f_n[\mathcal{P}_m(Y \cap [n])]| = 1$, contradiction. □