# Chapitre VII : récurrences structurelles

Stéphane Le Roux stephane.le_roux@ens-apris-saclay.fr

ENS Paris-Saclay

2023-2024

# Les principes de récurrences déjà vus

- Par récurrence sur un ordinal :
  - Preuve qu'une propriété est vraie pour tout ordinal.
  - Définition d'une fonction dont le domaine est un ordinal.
  - Définition d'une fonction dont le domaine est un ordinal, et simultanément preuve d'une propriété utile à la définition.
- Par récurrence sur une relation bien fondée :
  - Preuve qu'une propriété est vraie sur le domaine de la relation.
  - Définition d'une fonction dont le domaine est celui de la relation.
  - Définition d'une fonction, et simultanément preuve d'une propriété. (Pas vu en cours.)

Les pincipes de récurrences ci-dessus ne disent pas comment construire les relations bien fondées, ni leurs domaines.
Par exemple, les listes en informatique sont définies par la liste vide et une opération d'ajout. Sont-elles bien définies ? Est-ce lié aux résultats déjà vus en cours ?

# Construction d'un ensemble par récurrence structurelle

## Théorème (Rappel Bourbaki-Witt variante V)

Soit $(E, \leq)$ un ordre tel que toute chaîne non vide admet une borne sup. Soient $(f_\alpha : E \to E)_{\alpha<\beta}$ des applications progressives et croissantes. Alors il existe un plus petit point fixe de toutes les $f_\alpha$ au dessus de $a$.

## Corollaire, construction d'un ensemble

Soient $X$ un ensemble, $A \subseteq X$, et $\beta$ un ordinal. Pour tout $\alpha < \beta$, soient un ordinal $\gamma(\alpha)$ et $g_\alpha : X^{\gamma(\alpha)} \rightharpoonup X$ une fonction partielle. Alors il existe un plus petit ensemble $B$ parmi les ensembles contenant $A$ et clos par toutes les $g_\alpha$.

## Preuve

Soient $(E, \leq) := (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ et $f_\alpha : E \to E$ telle que $f_\alpha(C) := C \cup g_\alpha[C^{\gamma(\alpha)}]$. Ces $f_\alpha$ sont progressives et croissantes pour l'inclusion, donc il existe une plus petite partie de $X$ contenant $A$ et close par toutes les $g_\alpha$.

# Exemples

1. Pour définir les listes de nombres réels on peut écrire des règles d'inférence, ci-dessous :

$$\frac{}{nil \in List} \qquad \frac{x \in \mathbb{R} \quad l \in List}{x :: l \in List}$$

   C'est une manière synthétique de dire : soient $\Sigma := \mathbb{R} \cup \{nil, ::\}$ et $X := \Sigma^*$ et $A := \{nil\}$ et $g : \mathbb{R} \times X \to X$ tq $g(x, u) := x :: u$. Alors $List$ est la plus petite partie de $\Sigma^*$ close par $g$. On peut aussi utiliser une grammaire, cf $List ::= nil \mid \mathbb{R} :: List$, mais c'est moins expressif.

2. Pour définir la clôture transitive $R^+$ de $R \subseteq E \times E$ on peut écrire :

$$\frac{xRy}{xR^+y} \qquad \frac{xR^+y \quad yR^+z}{xR^+z}$$

   C'est une manière de dire : soit $X := E \times E$ et $A := R$ et $g : R \times R \to X$ tq $g((x, y), (z, t)) := (x, t)$ si $y = z$ et n'est pas définie sinon. Alors $R^+$ est la plus petite relation sur $E$ contenant $R$ et close par $g$. Exprimer cela par une grammaire serait compliqué.

# Exemples (II)

1. On définit la clôture symétrique ci-dessous.

$$\frac{xRy}{xR_{sym}y} \qquad \frac{yR_{sym}x}{xR_{sym}y}$$

   C'est une manière de dire : soit $X := E \times E$ et $A := R$ et $g : R \to X$ tq $g(x, y) := (y, x)$. Alors $R_{sym}$ est la plus petite relation sur $E$ contenant $R$ et close par $g$.

2. Clôture réflexive transitive ?

$$\frac{xRy}{xR_{refl}y} \qquad \frac{}{xR_{refl}x}\ x \in E$$

3. Plus petite relation d'équivalence contenant $R \subseteq E \times E$ ?

$$\frac{xRy}{xR_{eq}y} \qquad \frac{}{xR_{eq}x}\ x \in E \qquad \frac{yR_{eq}x}{xR_{eq}y} \qquad \frac{xR_{eq}y \quad yR_{eq}z}{xR_{eq}z}$$

# Compositions de clôtures

- Comparer
  1. La clôture réflexive et symétrique.
  2. La clôture réflexive de la clôture symétrique.
  3. La clôture symétrique de la clôture réflexive.
- Comparer
  1. La clôture symétrique et transitive.
  2. La clôture transitive de la clôture symétrique.
  3. La clôture symétrique de la clôture transitive.

# Exemples (III)

1. Soit $(G, \cdot, e)$ un groupe et $X \subseteq G$. Le sous-groupe $\langle X \rangle$ engendré par $X$ peut être défini comme suit.

$$\frac{x \in X}{x \in \langle X \rangle} \qquad \frac{x \in \langle X \rangle}{x^{-1} \in \langle X \rangle} \qquad \frac{x \in \langle X \rangle \quad y \in \langle X \rangle}{x \cdot y \in \langle X \rangle}$$

2. Soit $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Alors $EC(X)$ le plus petit convexe de $\mathbb{R}^d$ incluant $X$ peut-être exprimé comme suit.

$$\frac{x \in X}{x \in EC(X)} \qquad \frac{x, y \in EC(X)}{\alpha x + (1 - \alpha) y \in EC(X)}\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

# Preuve par récurrence structurelle

## Corollaire, rappel et ajout

- (Rappel) Soient $X$ un ensemble, $A \subseteq X$, et $\beta$ un ordinal. Pour tout $\alpha < \beta$, soient un ordinal $\gamma(\alpha)$ et $g_\alpha : X^{\gamma(\alpha)} \rightharpoonup X$ une fonction partielle. Alors il existe un plus petit ensemble $B$ parmi les ensembles contenant $A$ et clos par toutes les $g_\alpha$.
- (Ajout) Soit $\phi$ une formule telle que :
  - $\phi(x)$ pour tout $x \in A$.
  - Pour tout $\alpha < \beta$ et $(x_\delta)_{\delta<\gamma(\alpha)} \in dom(g_\alpha)$ on a : si $\phi(x_\delta)$ pour tout $\delta < \gamma(\alpha)$, alors $\phi(g_\alpha((x_\delta)_{\delta<\gamma(\alpha)}))$.

  Alors $\phi(x)$ pour tout $x \in B$.

# Exemples

Clôture réflexive et transitive $R^*$ de $R \subseteq E \times E$ :

$$\frac{xRy}{xR^*y} \qquad \frac{}{xR^*x}\ x \in E \qquad \frac{xR^*y \quad yR^*z}{xR^*z}$$

Soit $h : E \to \mathbb{Z}$.

- Définition : on dit que $R$ est $h$-croissante si $\forall (x, y) \in R, h(x) \leq h(y)$.
- Affirmation : si $R$ est $h$-croissante, alors $R^*$ aussi.
- Preuve par récurrence structurelle.
  - Règle 2 : pour tout $x \in E$ on a $h(x) \leq h(x)$.
  - Règle 3 : si $h(x) \leq h(y)$ et $h(y) \leq h(z)$, alors $h(x) \leq h(z)$.

  $R$ est $h$-croissante, $g_2$ et $g_3$ préservent la $h$-croissance, donc $R^*$ est $h$-croissante.

# Exemples (II)

Plus petite relation d'équivalence contenant $R \subseteq E \times E$.

$$\frac{xRy}{xR_{eq}y} \qquad \frac{}{xR_{eq}x}\; x \in E \qquad \frac{yR_{eq}x}{xR_{eq}y} \qquad \frac{xR_{eq}y \quad yR_{eq}z}{xR_{eq}z}$$

- Définition : soit $h : E \to \mathbb{Z}$, alors $R \subseteq E \times E$ est dite paritaire si $\forall (x, y) \in R, h(x) - h(y) \in 2\mathbb{Z}$.
- Affirmation : si $R$ est paritaire, alors $R_{eq}$ aussi.
- Preuve par récurrence structurelle.
  - Règle 2 : $h(x) - h(x) = 0 \in 2\mathbb{Z}$.
  - Règle 3 : si $h(y) - h(x) \in 2\mathbb{Z}$ alors $h(x) - h(y) \in 2\mathbb{Z}$.
  - Règle 4 : si $h(x) - h(y) \in 2\mathbb{Z}$ et $h(y) - h(z) \in 2\mathbb{Z}$, alors $h(x) - h(z) \in 2\mathbb{Z}$.

  $R$ est paritaire et $g_2, g_3, g_4$ préservent la parité, donc $R_{eq}$ est paritaire.

# Exemples (III)

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Alors $EC(X)$ le plus petit convexe de $\mathbb{R}^d$ incluant $X$ peut-être exprimé comme suit.

$$\frac{x \in X}{x \in EC(X)} \qquad \frac{x, y \in EC(X)}{\alpha x + (1-\alpha) y \in EC(X)}\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

Si une fonction affine est positive sur $X$, alors elle l'est aussi sur $EC(X)$. (Preuve en TD ?)

# Définition de fonctions par récurrence structurelle

Ce n'est pas pratique de définir une fonction par récurrence sur une clôture, car un élément peut faire partie de la clôture pour "différentes raisons".

## Corollaire, rappel et ajout

- (Rappel) Soient $X$ un ensemble, $A \subseteq X$, et $\beta$ un ordinal. Pour tout $\alpha < \beta$, soient un ordinal $\gamma(\alpha)$ et $g_\alpha : X^{\gamma(\alpha)} \rightharpoonup X$ une fonction partielle. Alors il existe un plus petit ensemble $B$ parmi les ensembles contenant $A$ et clos par toutes les $g_\alpha$.
- (Ajout) Soit $Y$ un ensemble.
  - Soit $h : A \to Y$.
  - Pour tout $\alpha < \beta$, soit $h_\alpha : X^{\gamma(\alpha)} \to Y$.

  On suppose que pour tout $x \in B \setminus A$, il existe un unique $\alpha < \beta$ et un unique $(x_\delta)_{\delta<\gamma(\alpha)} \in X^{\gamma(\alpha)}$ tq $x = g_\alpha((x_\delta)_{\delta<\gamma(\alpha)})$.
  Alors il existe une unique fonction $f : B \to Y$ tq $f|_A = h$ et $f(g_\alpha((x_\delta)_{\delta<\gamma(\alpha)})) = h((f(x_\delta))_{\delta<\gamma(\alpha)})$ pour tout $\alpha < \beta$ et $(x_\delta)_{\delta<\gamma(\alpha)} \in X^{\gamma(\alpha)}$.

# Exemple

On définit ci-dessous les listes de nombres entiers relatifs.

$$\frac{}{nil \in List} \qquad \frac{x \in \mathbb{Z} \quad l \in List}{x :: l \in List}$$

Soit $|\cdot| : List \to \mathbb{N}$ définit comme suit par récurrence.

- $|nil| := 0$
- $|x :: l| := 1 + |l|$ (pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et $l \in List$)

Soit $dans : \mathbb{Z} \times List \to \{0, 1\}$ définit comme suit par récurrence.

- $dans(z, nil) := 0$ (pour tout $z \in \mathbb{Z}$)
- $dans(z, x :: l) := \begin{cases} 1 \text{ si } z = x \vee dans(z, l) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ .

Soit $mult : List \to \mathbb{Z}$ définit comme suit par récurrence.

- $mult(nil) := 1$
- $mult(x :: l) := x \cdot mult(l)$

# Exemple (continuation)

**Lemme**

Soit $l \in List$ telle que $\forall z \in \mathbb{Z}, dans(z, l) \Rightarrow 3|z$. Alors $3^{|l|}|mult(l)$.

**Preuve**

Par récurrence structurelle sur $l$.

- $3^{|nil|} = 3^0 = 1|1 = mult(nil)$
- $3^{|x::l'|} = 3^{1+|l'|} = 3 \cdot 3^{|l'|}|x \cdot mult(l') = mult(x :: l')$. En effet :
  - $3|x$ car $dans(x, x :: l')$.
  - $3^{|l'|}|mult(l')$ par HR.