Chapitre VI : structures ordonnées et points fixes

Stéphane Le Roux leroux@lsv.fr

ENS Paris-Saclay

2023-2024

Propriétés de base des relations binaires

Définitions

Soit une relation binaire R sur un ensemble E. On dit que R est

- réflexive si $\forall x \in E$, xRx
- symétrique si $\forall x, y \in E$, $xRy \Rightarrow yRx$
- transitive si $\forall x, y, z \in E$, $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.
  (ou de manière plus concise : $xRyRz \Rightarrow xRz$)
- totale si $\forall x, y \in E$, $xRy \vee yRx$

Proposition

- Toute relation totale est aussi réflexive.
- Toute relation symétrique et totale est universelle, i.e. égale à $E \times E$.

Relations d'équivalence

Définition

- Une relation d'équivalence $\sim$ est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.
- Pour tout $x \in E$, on note $[x] := \{y \in E | x \sim y\}$, la classe d'équivalence de x.

Soit $f : E \to F$ une application. Pour tout $x, y \in E$, on note $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$. Alors $\sim$ est une relation d'équivalence. Ses classes d'équivalence sont les préimages $f^{-1}[z]$ pour $z \in F$.

Caractérisation des classes d'équivalence

Soit $\{E_i\}_{i\in I}$ une partition de E. ($\cup_i E_i = E$ et $E_i \cap E_j \neq \emptyset \Leftrightarrow i = j$.) Pour tout $x, y \in E$, on note $x \sim y$ s'il existe $i \in I$ tel que $x, y \in E_i$. Alors $\sim$ est une relation d'équivalence. Ses classes d'éq. sont les E_i pour $i \in I$.

Lemme

Soit $\sim$ une rel d'éq arbitraire.

- $\forall x \in E, \quad x \in [x] = \{y \in E | y \sim x\}$
- $\forall x, y \in E, \quad [x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow x \sim y$
- $\forall x, y \in E, \quad x \sim y \Rightarrow [x] = [y]$

Corollaire et définition

- Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur E constituent une partition de E.
- L'ensemble de ces classes est appelé l'ensemble quotient et est noté $E/\sim$.

Symétrie et antisymétrie des relations binaires

Définitions

Soit une relation binaire R sur un ensemble E. On dit que R est

- réflexive si $\forall x \in E,\ xRx$
- symétrique si $\forall x, y \in E,\ xRy \Rightarrow yRx$
- antisymétrique si $\forall x, y \in E,\ (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
- transitive si $\forall x, y, z \in E,\ (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$
- totale si $\forall x, y \in E,\ xRy \vee yRx$

- Une relation peut-elle être ni symétrique ni antisymétrique ?
- Une relation peut-elle être à la fois symétrique et antisymétrique ?

Ordres

- réflexive si $\forall x \in E,\ xRx$
- symétrique si $\forall x, y \in E,\ xRy \Rightarrow yRx$
- antisymétrique si $\forall x, y \in E,\ xRyRx \Rightarrow x = y$
- transitive si $\forall x, y, z \in E,\ xRyRz \Rightarrow xRz$
- totale si $\forall x, y \in E,\ xRy \vee yRx$
- Un préordre est une relation réflexive et transitive.
- Un ordre (partiel) est un préordre antisymétrique.
- Un ordre total est un ordre qui est total.

- La comparaison usuelle $\leq$ dans les entiers/réels est un ordre total.
- La divisibilité $\mid$ dans les entiers naturels est un ordre.
- La divisibilité $\mid$ dans les entiers relatifs est un préordre.
- La comparaison des ensembles via leurs cardinaux est un "préordre" de domaine non ensembliste (total si on admet l'axiome du choix).

L'irréflexivité

Définition

Soit une relation binaire R sur un ensemble E. On dit que R est irréflexive si $\forall x \in E, \neg(xRx)$

- Une relation peut-elle être ni réflexive ni irréflexive ?
- Une relation peut-elle être à la fois réflexive et irréflexive ?

Définitions

Soit une relation binaire R sur un ensemble E.

- $R \cup \{(x, y) \in E^2 \mid x = y\}$ est la clôture réflexive de R
- $R \cap \{(x, y) \in E^2 \mid x \neq y\}$ est la partie irréflexive de R

Asymétrie et trichotomie

Définition

Soit une relation binaire R sur un ensemble E. On dit que R est asymétrique si $\forall x, y \in E$, $xRy \Rightarrow \neg(yRx)$.

Proposition

Toute relation asymétrique est irréflexive et antisymétrique.

Définition

On dit que R est trichotomique si $\forall x, y \in E$, $xRy \vee yRx \vee x = y$, et seul un des trois cas est vrai.

Proposition

Toute relation trichotomique est asymétrique.

Ordres stricts

Définitions

- Un ordre (partiel) strict est une relation transitive et irréflexive.
- Un ordre linéaire strict (ou strict linéaire) est une relation transitive et trichotomique (mais pas total !)

- La comparaison usuelle $<$ dans les réels est un ordre linéaire strict.
- La conjunction $| \cap \neq$ dans les entiers naturels est un ordre strict.

Propositions

- Tout ordre strict est asymétrique.
- Tout ordre linéaire strict est un ordre strict.

Ordres stricts (II)

Propositions

- La partie irréflexive d'un ordre est un ordre strict.
- La clôture réflexive d'un ordre strict est un ordre.
- ("Pseudo transitivité") Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $<$ la partie irréflexive de $\leq$. Alors pour tout $x, y, z \in E$, on a
  - $x \leq y \wedge y < z \Rightarrow x < z$
  - $x < y \wedge y \leq z \Rightarrow x < z$

Relation vide

La relation binaire vide sur un ensemble E non-vide est-elle (Oui/Non)

réflexive	
symétrique	
transitive	
totale	
irréflexive	
antisymétrique	
asymétrique	
trichotomique	

Relation universelle

La relation binaire universelle sur un ensemble E non-vide est-elle

réflexive	
symétrique	
transitive	
totale	
irréflexive	
antisymétrique	
asymétrique	
trichotomique	

Relation vide et relation universelle

Soit E un ensemble non vide.

La relation binaire vide sur E

- est irréflexive, symétrique, antisymétrique, asymétrique, transitive.
- n'est pas réflexive, totale, trichotomique.

La relation binaire universelle sur E

- est réflexive, symétrique, transitive, totale,
- n'est pas irréflexive, antisymétrique, asymétrique, trichotomique.

Restriction de domaine

Définition

Soit R une relation binaire sur un ensemble E. Pour tout $F \subseteq E$, on note R_F le restriction de R à F, i.e. la relation $R \cap (F \times F)$ sur F.

$F \times F$ est la relation universelle sur F, mais pas sur $E \supsetneq F$.

Proposition

Si R est réflexive, alors R_F l'est aussi. Si R est symétrique/transitive/totale/antisymétrique/irréflexive/asymétrique/trichotomique, alors R_F l'est aussi.

- Soit R transitive sur E : $\forall x, y, z \in E$, $xRyRz \Rightarrow xRz$. Soit $F \subseteq E$, alors $\forall x, y, z \in F$, $xRyRz \Rightarrow xRz$, i.e. R_F est transitive. (Explication informelle : x, y et z sont quantifiés universellement.)
- On définit R sur $\{0, 1\}$ par xRy si $x \neq y$. Alors R vérifie $\forall x \exists y$, xRy, mais si on prend $F := \{0\}$, alors R_F ne vérifie plus la formule.

Relation inverse

Définition

Soit R une relation binaire sur un ensemble E. Son inverse est $R^{-1} := \{(y,x) \in E \times E \mid (x,y) \in R\}$. Autrement dit, xRy ssi $yR^{-1}x$.

Dans beaucoup de cas, R^{-1} est plutôt représentée par le symbole "miroir" de R. Par exemple, on écrit $\geq$ plutôt que $\leq^{-1}$.

Proposition

Si R est réflexive, alors R^{-1} aussi. Si R est symétrique, transitive, totale, antisymétrique, irréflexive, asymétrique, ou trichotomique, alors R^{-1} aussi.

- Une relation binaire R sur E est symétrique si $\forall y, x \in E$, $yRx \Rightarrow xRy$, i.e. $\forall x, y \in E$, $xR^{-1}y \Rightarrow yR^{-1}x$, i.e. R^{-1} est symétrique. (Explication informelle : x et y sont quantifiés de la même manière.)
- $(\mathbb{N}, \leq)$ vérifie $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}$, $x \leq y$, mais $\leq^{-1}$ (i.e. $\geq$) non.

Éléments extrémaux

Définitions

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, i.e. $\leq$ est un ordre (partiel) sur E.

- $x \in E$ est un/le plus grand élément de E si $\forall y \in E, y \leq x$.
- $x \in E$ est un élément maximal de E si $\forall y \in E$, $x \leq y \Rightarrow x = y$.
- Les éléments minimaux et le plus petit élément pour $\leq$ sont définis comme les éléments maximaux et le plus grand élément de $\leq^{-1}$.
- Une partie est fermée par le haut (ou supérieurement) pour $\leq$, si elle est fermé inférieurement pour $\leq^{-1}$.

- $(\llbracket 0, n \rrbracket, \leq)$ a un plus grand élément n et un plus petit élément 0.
- $(\llbracket 2, 9 \rrbracket, |)$ a pour minima $2, 3, 5, 7$ et pour maxima $5, 6, 7, 8, 9$. Le seul élément non-extrémal est 4.
- $(\mathbb{N}, \leq)$ a un plus petit élément 0 mais pas de plus grand élément.
- $(\mathbb{N}, |)$ a un plus petit élément 1 et un plus grand élément 0.

Éléments extrémaux (II)

Propositions

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

- Un plus grand élément est l'unique élément maximal. Mais un unique élément maximal n'est pas toujours le plus grand élément.
- Soit $<$ la partie irréflexive de $\leq$. Alors $x \in E$ est un él. max. de E ssi $\forall y \in E, \neg(x < y)$. Notons que $\neg(x < y)$ n'équivaut pas à $y \leq x$.
- Soit $x \in H \subseteq E$
  - Si x est maximal pour $\leq$, alors il l'est aussi pour $\leq_H$.
  - x peut être maximal pour $\leq_H$ mais pas pour $\leq$.
  - Si H est fermé par le haut et x est $\leq_H$-max, alors x est $\leq$-max.
- Si E est fini et non-vide, il admet un élément maximal.
- Si E est fini et $x \in E$, il existe un él. max. y dans E tel que $x \leq y$.
- Si E est fini et admet un unique él. max., alors c'est un $+$ grand él.
- Si toute partie finie de E a un $+$ grand él., alors $\leq$ est un ordre total.

Bornes supérieures et inférieures

Définitions

Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $F \subseteq E$ et $x \in E$.

- x est un majorant de F si $y \leq x$ pour tout $y \in F$.
- Quand l'ensemble des majorants de F a un plus petit élément, on l'appelle la borne supérieure de F, notée $\sup F$.
- Les minorants et bornes inférieures de $\leq$, notée inf, sont les majorants et bornes supérieures de $\geq$, i.e. $\leq^{-1}$.

Propositions

- $x \in F$ est majorant de F ssi c'en est le plus grand élément.
- Le plus grand élément d'une partie en est la borne supérieure.

- $[0, 1[\subseteq \mathbb{R}$ n'a pas de plus grand élément, mais $\sup[0, 1[= 1$.
- L'ensemble $\{x \in [0, 2] \cap \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, mais sa borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est $\sqrt{2}$.

Bornes supérieures et inférieures (II)

Exemples

- Soient $(E,\leq) := (\mathcal{P}(X),\subseteq)$ et $F := \{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Alors $\cup_{i\in I} Y_i$ est la borne supérieure de F et $\cap_{i\in I} Y_i$ est la borne inférieure de F.
- Soient $(E,\leq) := (\mathbb{N},|)$ et $F := \{n_1,\ldots,n_k\} \subseteq \mathbb{N}$. Alors le $\mathrm{ppcm}(n_1,\ldots,n_k)$ est la borne supérieure de F et le $\mathrm{pgcd}(n_1,\ldots,n_k)$ est la borne inférieure de F.
- Soient $(E,\leq) := (\mathbb{N}^*,|)$ et F une partie infinie de $\mathbb{N}^*$. Alors F a une borne inférieure (un pgcd), mais pas de borne supérieure (ppcm).
- $\sup_{([0,1[\cup[2,3],\leq)}[0,1[= 2$.
- Soient $(E,\leq) := (\mathcal{P}([0,1]),\subseteq)$ et $(F,\leq_F) := (\mathcal{I}([0,1]),\subseteq)$. Alors $\sup_E\{[0,\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},1]\} = [0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$, mais $\sup_F\{[0,\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},1]\} = [0,1]$.

Lemme

Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et $F \subseteq E$. Si $\sup_{(E,\leq)} F$ existe et est dans F, alors c'est le plus grand élément de F, i.e. c'est $\sup_{(F,\leq_F)} F$.

Intersection et éléments extrémaux

Proposition

Soit E un ensemble et $\leq_1$ et $\leq_2$ deux ordres sur E tels que $\leq_1 \subseteq \leq_2$. Tout élément extrémal pour $\leq_2$ est extrémal pour $\leq_1$.

Corollaire

L'intersection d'ordres préserve les éléments extrémaux.

Remarque

L'intersection d'ordres peut générer de nouveaux éléments extrémaux. Elle ne préserve donc pas l'existence d'un plus petit/grand élément (ni de borne inférieure et supérieure). Exemple : sur $\{0, 1\}$, considérer $\leq$ et $\geq$.

Produit lexicographique d'ordres

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit un ordre (i.e. partiel) $\leq_n$ sur un ensemble E_n. Pour $x, y \in E := \prod_n E_n$ on pose $x \leq_{\mathrm{lex}} y$ si $x = y$ ou bien si $x_k <_k y_k$, où $k := \min\{i \in I \mid x_i \neq y_i\}$.

Proposition

Le produit lexicographique d'ordres (totaux) est un ordre (total).

On peut étendre l'ordre lexicographique aux mots de longueur arbitraire (finie ou infinie) dont la n-ième lettre éventuelle est un élément de E_n. En général, on considère le cas particulier où les E_n et $\leq_n$ sont les mêmes.

Treillis

Définition

- Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute paire d'éléments a une borne supérieure et une borne inférieure. (On demande parfois la non-vacuité de l'ensemble.)
- Un treillis complet est un ensemble ordonné dans lequel toute partie admet une borne supérieure et une borne inférieure.

- Un ordre total est un treillis. Le maximum de deux éléments est leur borne supérieure.
- L'ensemble vide est un treillis, mais tout treillis complet est non-vide.
- $(\mathbb{N}, |)$ est un treillis complet de plus petit (grand) élément 1 (0).
- $(\mathbb{N}^*, |)$ est un treillis mais pas complet car aucune partie infinie de $\mathbb{N}^*$ n'admet de borne supérieure. (Et $\emptyset$ n'a pas de borne inférieure.)
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est un treillis complet.

Treillis (II)

Définition

- Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute paire d'éléments a une borne supérieure et une borne inférieure. (On demande parfois la non-vacuité de l'ensemble.)
- Un treillis complet est un ensemble ordonné dans lequel toute partie admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Lemma

Un treillis complet est un treillis.

Lemma

Si $(E, \leq)$ *est un treillis (resp. treillis complet), alors* $(E, \leq^{-1})$ *aussi.*

Treillis (III)

Lemma

Toute partie finie non-vide d'un treillis a une borne supérieure.

Par récurrence sur le cardinal de cette partie. $\square$

Lemma

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné dont toute partie admet une borne supérieure. Alors $(E, \leq)$ est un treillis complet.

Proof.

Soit $B \subseteq E$, soit A l'ensemble des minorants de B. Pour tout $b \in B$ on a $A \leq b$, donc $\sup A \leq b$ par définition du supremum, donc $\sup A \in A$, donc $\sup A = \inf B$. $\square$

Corollary

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné dont toute partie admet une borne inférieure. Alors $(E, \leq)$ est un treillis complet.

Treillis (IV)

Theorem

Dans ZFC. Soit $(E, \leq)$ un ordre tel que toute paire a une borne sup et toute chaîne a une borne sup. Alors $(E, \leq)$ est un treillis complet.

Soit $\emptyset \neq A \subseteq E$. Montrons que A admet une borne supérieure. Soit κ l'ordinal cardinal de A et une bijection $f : \kappa \to A$.

- On pose $g(0) := f(0)$,
- $g(\alpha + 1) := \sup(g(\alpha), f(\alpha + 1))$,
- pour tout α limite non nul, $g(\alpha) := \sup(f(\alpha), \sup_{\beta<\alpha} g(\beta))$

La fonction g est bien définie grâce aux deux hypothèses de borne sup. En particulier elle est croissante (par récurrence mutuelle), et $f \leq g$ donc $m := \sup_{\beta<\kappa} g(\beta)$ majore A. Soit $b \in E$ qui majore A. Mq $m \leq b$.

- $g(0) = f(0) \leq b$, car $f(0) \in A$.
- Si $g(\alpha) \leq b$, alors $g(\alpha + 1) \leq b$, car $b \geq f(\alpha + 1) \in A$.
- Supposons que α est limite non nul et $g(\beta) \leq b$ pour tout $\beta < \alpha$. Alors $\sup_{\beta<\alpha} g(\beta) \leq b$, donc $g(\alpha) \leq b$, car $b \geq f(\alpha) \in A$.

Donc $g(\beta) \leq b$ pour tout $\beta < \kappa$, donc $m \leq b$.

Application croissante et point fixe

Définitions

Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

- Une application $f : E \to E$ est dite croissante si $\forall x, y \in E,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- Un point fixe d'une application $f : E \to E$ est un $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

Lemma

Si $f : (E, \leq) \to (E, \leq)$ est croissante alors $f : (E, \leq^{-1}) \to (E, \leq^{-1})$ est croissante.

Théorème de Knaster–Tarski

Chemin de preuve

Lemme de Knaster–Tarski

Soient $(E, \leq)$ un treillis complet et $f : E \to E$ croissante. Alors $\inf\{x \in E \mid f(x) \leq x\}$ est le plus petit point fixe de f. Symétriquement, f a un plus grand point fixe.

Lemme

Soient $(E, \leq)$ un treillis complet et $a, b \in E$ tels que $a \leq b$. Alors $([a, b], \leq_{[a,b]})$ est aussi un treillis complet, où $[a, b] := \{x \in E | a \leq x \leq b\}$.

Théorème de Knaster–Tarski

Soient $(E, \leq)$ un treillis complet, $f : E \to E$ croissante, et P l'ensemble des points fixes de f. Alors $(P, \leq_P)$ est un treillis complet.

Lemme de Knaster–Tarski

Lemme de Knaster–Tarski

Soient $(E, \leq)$ un treillis complet et $f : E \to E$ croissante. Alors $\inf\{x \in E \mid f(x) \leq x\}$ est le plus petit point fixe de f. Symétriquement, f a un plus grand point fixe.

Proof.

Mq f a un plus petit point fixe. Soit $P := \{x \in E \,|\, f(x) \leq x\}$ l'ensemble des pré points fixes. Soit $y := \inf P$.

- Mq $y \in P$. Pour tout $x \in P$ on a $y \leq x$ donc $f(y) \leq f(x)$, donc $f(y) \leq f(x) \leq x$, i.e. $f(y) \leq P$. Or $y = \inf P$ donc $f(y) \leq y$.
- Mq $f(y) = y$. De plus $f(y) \leq y$ implique $f(f(y)) \leq f(y)$, donc $f(y) \in P$, donc $y \leq f(y)$ car $y \leq P$. Par antisymétrie $f(y) = y$.
- Tout point fixe de f étant dans P, y est le plus petit point fixe de f.

□

Treillis sur un intervalle

Lemme

Soient $(E, \leq)$ un treillis complet et $a, b \in E$ tels que $a \leq b$. Alors $([a, b], \leq_{[a,b]})$ est aussi un treillis complet, où $[a, b] := \{x \in E | a \leq x \leq b\}$.

Proof.

Il suffit de montrer l'existence de bornes inférieures dans $([a, b], \leq_{[a,b]})$.
Soit $C \subseteq [a, b]$.

- Si $C = \emptyset$ alors b est la borne inférieure de C dans $([a, b], \leq_{[a,b]})$.
- Si $C \neq \emptyset$, soit $m := \inf_E C$. Or $a \leq C$, donc $a \leq m$. Soit $x \in C \subseteq [a, b]$, donc $x \leq b$, donc $m \leq x \leq b$ car $m = \inf C$. Donc $m \in [a, b]$. Ainsi $m = \inf_{[a,b]} C$.

□

Théorème de Knaster–Tarski

Théorème de Knaster–Tarski

Soient $(E, \leq)$ un treillis complet et f une application croissante de E. Alors l'ensemble des points fixes de f constitue un treillis complet.

Preuve : Soit $P := \{x \in E \mid f(x) = x\}$.

- Par un lemme précédent, P a un plus grand élément et un plus petit élément, qui sont les bornes inf et sup de $\emptyset$ dans P.
- Soit $\emptyset \neq A \subseteq P$. Mq A a une borne inf dans P. Soit $m := \inf_E A$ et soit $I := [\inf E, m] = \{x \in E | x \leq m\}$. D'après le lemme précédent, $(I, \leq_I)$ est un treillis complet. Soit $x \in I$. Pour tout $y \in A$ on a $x \leq m \leq y$, donc $f(x) \leq f(y) = y$. Ainsi, $f(x) \leq A$, donc $f(x) \leq m = \inf_E A$. Donc $f(x) \in I$. L'application $f_I : I \to I,\ x \mapsto f(x)$ est bien définie et croissante dans le treillis complet $(I, \leq_I)$. D'après un lemme, f_I a un plus grand point fixe z (et $z \leq m$). On a $z \in P$. Pour tout $x \in P$ tel que $x \leq m$, x est aussi un point fixe de f_I, donc $x \leq z$. Ainsi, tout point fixe de f minorant A minore aussi z. Donc $z = \inf_P A$.

Théorème de (Anne) Davis

Théorème

Soient $(E, \leq)$ un treillis. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- Le treillis est complet.
- Toute application croissante de E dans E a un point fixe.

Il existe une preuve du théorème de Cantor-Bernstein qui utilise le lemme de Knaster-Tarski, i.e. l'implication haut-bas du théorème de Davis.

Continuité au sens de Scott

Définition

Soient E et F deux ensembles ordonnés. $f : E \to F$ est continue au sens de Scott si pour toute suite croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E admettant une borne supérieure, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ en admet aussi une et $\sup_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = f(\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n)$.

Proposition

Toute application continue au sens de Scott est croissante.

Proof.

Soit $x \leq y$ Soit $x_0 := x$ et $x_n := y$ pour tout $n > 0$. Alors $\sup\{f(x), f(y)\} = f(\sup\{x, y\}) = f(y)$. $\square$

Proposition

Pour les fonctions dont l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$, la continuité de Scott équivaut à la croissance et la continuité à gauche.

Théorème du point fixe de Kleene

Théorème du point fixe de Kleene

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné muni d'un plus petit élément $\perp$ et tel que toute suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une borne supérieure. Soit $f : E \to E$ continue au sens de Scott. Alors f admet un plus petit point fixe, la borne supérieure de la suite $(f^n(\perp))_{n\in\mathbb{N}}$.

Proof.

- On a $\perp \leq f(\perp)$, puis $f^n(\perp) \leq f^{n+1}(\perp)$ par croissance. Soit $x := \sup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)$. Donc $x = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} f^n(\perp) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f(f^n(\perp))$. Par continuité de Scott $x = f(\sup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)) = f(x)$.
- Soit $y \in E$ tel que $f(y) = y$. Alors $\perp \leq y$ et $f^n(\perp) \leq f(y) = y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $x = \sup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp) \leq y$ par la définition du sup. Donc x est le plus petit point fixe de f.

$\square$

Différence entre Knaster-Tarski et Kleene

Toute suite croissante admet une borne sup = forme faible de complétude.
Continuité au sens de Scott = plus fort que la croissance.

Un point fixe difficile à approximer par le bas

$$
\begin{aligned}
f : [0,2] &\to [0,2] \\
x &\mapsto \begin{cases} \frac{1+x}{2} \text{ si } x \in [0,1[\\ \frac{2+x}{2} \text{ si } x \in [1,2] \end{cases}
\end{aligned}
$$

La fonction f est croissante, $([0,2], \leq)$ est un treillis complet, le théorème de Knaster-Tarski s'applique donc.

Cependant, le seul point fixe de f est 2, alors que $\sup\{f^n(0)\}_{n\in\mathbb{N}} = 1$, car $f^n(0) = 1 - \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème de Bourbaki-Witt

Définitions

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

- Une chaîne de E est une partie C de E telle que $\leq_C$ est un ordre total.
- Une application $f : E \to E$ est dite progressive si $\forall x \in E, x \leq f(x)$.

Théorème

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que toute chaîne non vide admet une borne supérieure. Soit $f : E \to E$ une application progressive.
Alors pour tout $a \in E$, il existe un point fixe de f au-dessus de a.

Théorème de Bourbaki-Witt

Théorème

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que toute chaîne non vide admet une borne supérieure. Soit $f : E \to E$ une application progressive.
Alors pour tout $a \in E$, il existe un point fixe de f au-dessus de a.

Soit α un ordinal équipotent à aucune des parties de E. On définit la suite $\langle a_\beta : \beta < \alpha \rangle$ par récurrence sur β tout en prouvant sa croissance.

- $a_0 := a$, c'est une suite croissante.
- $a_{\beta+1} := f(a_\beta)$. La nouvelle suite est croissante car f est progressive.
- Pour β limite non nul, mq $\langle a_\gamma : \gamma < \beta \rangle$ est croissante: pour $\gamma < \delta < \beta$, on a $a_\gamma \leq a_\delta$ car $\langle a_\gamma : \gamma < succ(\delta) \rangle$ est croissante par HR. On pose $a_\beta := \sup\{a_\gamma | \gamma < \beta\}$, d'où croissance de $\langle a_\gamma : \gamma < succ(\beta) \rangle$.

Or $\beta \mapsto a_\beta$ n'est pas injective par hypothèse sur α. Soit donc $\beta < \gamma$ tels que $a_\beta = a_\gamma$. Alors $a_\beta \leq a_{\beta+1} \leq a_\gamma = a_\beta$, donc $f(a_\beta) = a_\beta$.

Théorème de Bourbaki-Witt, variante I

Théorème

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que toute chaîne non vide admet une borne supérieure. Soit $f : E \to E$ une application progressive et **croissante**. Alors pour tout $a \in E$, il existe un **plus petit** point fixe de f au-dessus de a.

[...]

- $a_0 := a$
- $a_{\beta+1} := f(a_\beta)$
- Pour β limite non nul, on pose $a_\beta := \sup\{a_\gamma | \gamma < \beta\}$

[...]
$f(a_\beta) = a_\beta$.
Si f est croissante, soit $b \geq a$ tel que $f(b) = b$, alors on peut montrer par récurrence que $a_\gamma \leq b$ pour tout $\gamma < \alpha$, donc le point fixe $a_\beta \leq b$.

Théorème de Bourbaki-Witt, variante II

Théorème

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que **toute suite ordinale croissante** non vide admet une borne supérieure. Soit $f : E \to E$ une application progressive.
Alors pour tout $a \in E$, il existe un point fixe de f au-dessus de a.

Proof.

[...]

- $a_0 := a$
- $a_{\beta+1} := f(a_\beta)$
- Pour β limite non nul, on pose $a_\beta := \sup\{a_\gamma | \gamma < \beta\}$

[...] $\square$

Théorème de Bourbaki-Witt, variante III

Théorème

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que toute chaîne non vide admet une borne supérieure. Soit $f : E \to E$ une application **croissante**.
Alors **pour tout** $a \in E$ **tel que** $a \leq f(a)$, il existe un **plus petit** point fixe de f au-dessus de a.

Proof.

[...]

- $a_0 := a$
- $a_{\beta+1} := f(a_\beta)$
- Pour β limite non nul, on pose $a_\beta := \sup\{a_\gamma | \gamma < \beta\}$

[...] □

Théorème de Bourbaki-Witt, variante IV

Théorème

Soit $(E, \leq)$ un ordre tel que toute chaîne non vide admet un **majorant**. Soit $f : E \to E$ progressive. On suppose l'**axiome du choix**. Alors pour tout $a \in E$, il existe un point fixe de f au-dessus de a.

Théorème de Bourbaki-Witt, variante V

Théorème, le point 3 généralise la variante I

Soit $(E, \leq)$ un ordre tel que toute chaîne non vide admet une borne sup.

1. Soient $f, g : E \to E$ deux applications progressives. Alors pour tout $a \in E$, il existe un point fixe de f et g au-dessus de a.
2. Soient $(f_\alpha : E \to E)_{\alpha<\beta}$ des applications progressives. Alors il existe un point fixe de toutes les f_α au dessus de a.
3. Soient $(f_\alpha : E \to E)_{\alpha<\beta}$ des applications progressives et croissantes. Alors il existe un plus petit point fixe de toutes les f_α au dessus de a.

Que se passe-t-il si on remplace $(f_\alpha : E \to E)_{\alpha<\beta}$ ci-dessus par un ensemble F de fonctions progressives et croissantes ?
A-t-on des extensions similaires pour les points fixes de Knaster-Tarski ou Kleene ?

Lemma

1. *La composée de deux fonctions croissantes est croissante.*
2. *La composée de deux fonctions Scott-continues est Scott-continue.*

Un point fixe peu constructif

Lemma

Soient $(E, \leq)$ un treillis complet et $S \subseteq E^E$ des fonctions croissantes et progressives.

1. *Alors la borne inférieure (dans E) de tout sous-ensemble de points fixes pour toutes les $f \in S$ est un point fixe pour toutes les $f \in S$.*
2. *En particulier, pour tout $a \in E$, il existe au dessus de a un plus petit point fixe pour toutes les $f \in S$.*

1. Soit F un sous-ensemble des points fixes de toutes les $f \in S$. Soit $y := \inf F$. Alors pour $x \in F$ on a $y \leq x$, donc pour toute $f \in S$ on a $f(y) \leq f(x) = x$ par croissance, donc $f(y) \leq y = \inf F$. Or $y \leq f(y)$ car f progressive, donc $f(y) = y$ par antisymétrie.
2. En prenant F l'ensemble des points fixes de toutes les $f \in S$ au dessus de a. On a bien $a \leq \inf F$.

Comment rendre ce lemme légèrement plus constructif ?

Opérateurs de clôture

Définition

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Un opérateur de clôture est une application $c : E \to E$ tel que pour tout x, y

- $x \leq c(x)$ (progressive, inflationnaire, etc)
- $c^2(x) = c(x)$ (idempotente)
- $x \leq y \Rightarrow c(x) \leq c(y)$ (croissante)

- Dans les espaces vectoriels, le sous-espace engendré par une partie A.
- Dans les relations binaires, la clôture transitive d'une relation R.
- Dans les ordinaux, le cardinal d'un ordinal, pour la relation $>$, i.e. $<^{-1}$.

Comment construire des opérateurs de clôture ? Deux méthodes.

Opérateur de clôture par points fixes

Lemma

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $f : E \to E$ telle que pour tout $x \in E$, parmi les points fixes $y \geq x$ de f, il en existe un plus petit y_x. Alors $c : x \mapsto y_x$ est un opérateur de clôture.

- $x \leq c(x)$, cf $x \leq y_x$ dans l'énoncé ci-dessus.
- $c(c(x)) = c(x)$, car $f(y_x) = y_x$ et $c(x) = y_x$.
- Si $x \leq y$, alors $x \leq y \leq c(y)$ et $c(y) = y$ donc $c(x) \leq c(y)$.

□

Lemma ("Réciproque")

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $c : E \to E$ un opérateur de clôture. Alors pour tout $x \in E$, $c(x)$ est le plus petit point fixe $y \geq x$ de c.

$c(c(x)) = c(x)$, et si $x \leq y = c(y)$, alors $c(x) \leq c(y) = y$ par croissance de c. □

Opérateur de clôture par points fixes (II)

Theorem

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que toute chaîne non-vide a une borne supérieure. Soient $(f_\alpha : E \to E)_{\alpha<\beta}$ des fonctions progressives et croissantes. Soit $c : E \to E$ qui a tout x associe le plus petit point fixe au dessus de x de la "composée" des f_α. Alors c est un opérateur de clôture.

- Soient $(E, \leq) = (\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \subseteq)$ et $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(S) := \{px + (1-p)y \mid x, y \in S \wedge p \in [0,1]\}$. Alors le c induit retourne l'enveloppe convexe.
- Soient un ensemble E et $f : (\mathcal{P}(E \times E)) \to (\mathcal{P}(E \times E))$ telle que $f(R) := R \cup R^2 = \{(x, y) \in E \times E \mid xRy \vee \exists z \in E, xRzRy\}$. Alors le c induit retourne la clôture transitive: $c(R)$ est la plus petite relation contenant R et stable par f, i.e. qui soit transitive.
- Soit $g : (\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)) \to (\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E))$ telle que $g(R) := R \cup R^{-1}$. Alors le c induit retourne la clôture symétrique.
- Le c induit par f et g retourne la clôture symétrique et transitive.

Opérateur de clôture par système de clôture

Définition

Soit $(E, \leq)$ un treillis complet. Un système de clôture est un ensemble non vide $F \subseteq E$ clos par borne inférieure: $\forall \emptyset \neq G \subseteq F, \inf G \in F$.

- Dans les espaces vectoriels, les sous-espaces contenant A.
- Dans $\mathbb{R}^n$, les convexes contenant A.
- Dans les relations binaires, les relations transitives contenant R.
- Dans les ordinaux infinis, les ordinaux plus petits que α.

Lemma ("Réciproque")

Soit $(E, \leq)$ un treillis complet. Soient c un opérateur de clôture et $F := \{x \in E \mid c(x) = x\}$. Alors F est un système de clôture.

Proof.

Soit $\emptyset \neq G \subseteq F$. Alors $c(\inf G) \leq c(x) = x$ pour tout $x \in G$, donc $c(\inf G) \leq \inf G$. Or $\inf G \leq c(\inf G)$, d'où égalité. $\square$

Opérateur de clôture par système de clôture (II)

Theorem

Soit $(E, \leq)$ *un treillis complet. Soient* F *un système de clôture et* $c : E \to E$ *tel que* $c(x) := \inf\{y \in F \mid x \leq y\}$*. Alors* c *est un opérateur de clôture.*

Proof.

Pour tout $x \in E$ soit $H(x) := \{y \in F \mid x \leq y\}$, donc $c(x) = \inf H(x)$.

- $H(x) \subseteq F$ donc $c(x) = \inf H(x) \in F$, par définition de F.
- Mq c est progressive : pour tout $y \in H(x)$ on a $x \leq y$, donc $x \leq \inf H(x) = c(x)$.
- Mq c est idempotente : pour tout $z \in F$ on a $z \in H(z)$, donc $c(z) = \inf H(z) = z$, donc $c(c(x)) = c(x)$.
- Mq c est croissante : si $x \leq y$, alors $H(y) \subseteq H(x)$, donc $\inf H(x) \leq \inf H(y)$.

$\square$

Points fixes et système de clôture

Theorem

Soit $(E, \leq)$ *un treillis complet. Soient* $(f_\alpha : E \to E)_{\alpha<\beta}$ *des fonctions progressives et croissantes. Pour tout* $x \in E$*, les deux objets suivants sont égaux.*

- *Le plus petit point fixe au dessus de* x *de la "composée" des* f_α*.*
- *La borne inférieure dans* E *des* $y \geq x$ *qui sont points fixes de toutes les* f_α*.*

L'application qui à x *associe cet élément est un opérateur de clôture.*