Chapitre V : Axiome du choix

Stéphane Le Roux leroux@lsv.fr

ENS Paris-Saclay

2023-2024

L'axiome du choix (AC)

- Soit E un ensemble d'ensembles non vides. Une fonction de choix pour E est une fonction f de domaine actif E telle que $f(X) \in X$ pour tout $X \in E$.
- Axiome du choix (AC) : tout tel ensemble E a une fonction de choix.
- Les autres axiomes qui postulent l'existence d'un ensemble le construisent plus ou moins, et il est unique. (Sauf pour l'axiome de l'infini, mais il existe un plus petit ensemble le vérifiant.)
  En revanche l'axiome du choix est beaucoup moins constructif.
- AC est indépendant des autres axiomes de ZF :
  - il existe des mondes (des modèles) où AC est vrai.
  - il existe des mondes (des modèles) où AC est faux.
- Il est parfois/souvent intéressant de savoir si AC est utile ou indispensable pour une preuve.

Théorème du bon ordre

Theorem (Zermelo)

Supposons AC. Alors tout ensemble est bien ordonnable.

Proof.

Soit E un ensemble. Par AC soit h une fonction de choix pour $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Soit un ordinal α équipotent à aucune des parties de E.

- Soit $g : (\cup_{\beta<\alpha} E^\beta) \to E$ telle que pour tout $\phi : \beta \to E$ on a $g(\phi) := h(E)$ si $\phi[\beta] = E$ et $g(\phi) := h(E \setminus \phi[\beta])$ sinon. Soit $f : \alpha \to E$ l'unique fonction telle que $f(\beta) := g(f|_\beta)$ pour tout $\beta < \alpha$.
- Il n'existe pas de fonction injective de α vers E, car sinon α serait équipotent à l'image d'une telle fonction. Soit donc $\theta < \alpha$ minimal tel que $\exists \beta < \theta (f(\beta) = f(\theta))$. Donc $f|_\theta$ est injective.
- Mq $f[\theta] = E$. Sinon $f(\theta) = g(f|_\theta) = h(E \setminus f[\theta]) \in E \setminus f[\theta]$, donc $f(\theta) \neq f(\beta)$ pour tout $\beta < \theta$, contradiction. Ainsi $f|_\theta$ est bijective, donc induit un bon ordre sur E.

$\square$

Théorème du bon ordre (II)

Corollary (En supposant AC)

Tout ensemble E est équipotent à un unique cardinal, noté $|E|$.

Theorem (Réciproque du théorème du bon ordre)

Supposons que tout ensemble soit bien ordonnable. Alors AC est vrai.

Proof.

En TD. $\square$

Principe de maximalité de Hausdorff

Soit un ordre partiel strict $(E, \prec)$. On appelle $C \subseteq E$ une chaîne si $(C, \prec|_{C \times C})$ est un ordre total. (Certain.e.s demandent C non vide.)

Theorem (En supposant AC)

Soit un ordre partiel non-vide $(E, \prec)$. Pour toute chaîne C, il existe une chaîne maximale pour l'inclusion et incluant C.

Soit une bijection $f : \alpha \to E$ où α est ordinal. Pour tout $\beta < \alpha$ on construit C_β par récursion, avec la propriété $P(\beta)$ disant "$C \subseteq C_\beta$ et C_β est une chaîne maximale dans $C \cup f[\beta]$ et $C_\gamma \subseteq C_\delta$ pour tout $\gamma < \delta \leq \beta$".

- $C_0 := C$. Alors $P(0)$.
- Cas successeur. Si $C_\beta \cup \{f(\beta)\}$ est une chaîne, $C_{\beta+1} := C_\beta \cup \{f(\beta)\}$, sinon $C_{\beta+1} := C_\beta$. Dans les deux cas, $C \subseteq C_{\beta+1}$ et $C_\gamma \subseteq C_\delta$ pour tout $\gamma < \delta \leq \beta + 1$. Soit $x \in C \cup f[\beta+1] \setminus C_{\beta+1} = f[\beta+1] \setminus C_{\beta+1}$.
  - Cas $C_{\beta+1} := C_\beta \cup \{f(\beta)\}$. Alors $x \in f[\beta+1] \setminus C_{\beta+1} = f[\beta] \setminus C_\beta$. Donc $C_\beta \cup \{x\}$ n'est pas une chaîne par HR, donc $C_{\beta+1} \cup \{x\}$ non plus.
  - Cas $C_{\beta+1} := C_\beta$. Alors $x \in f[\beta+1] \setminus C_\beta$. Si $x = f(\beta)$, alors $C_\beta \cup \{x\}$ n'est pas une chaîne. Si $x \in f[\beta]$, alors cf le premier cas ci-dessus.

Principe de maximalité de Hausdorff (II)

Soit un ordre partiel strict $(E, \prec)$. On appelle $C \subseteq E$ une chaîne si $(C, \prec|_{C\times C})$ est un ordre total. (Certain.e.s demandent C non vide.)

Theorem (En supposant AC)

Soit un ordre partiel non-vide $(E, \prec)$. Pour toute chaîne C, il existe une chaîne maximale pour l'inclusion et incluant C.

Soit une bijection $f : \alpha \to E$ où α est un ordinal. Pour tout $\beta < \alpha$ on construit C_β par récursion. Soit $P(\beta)$ la propriété "$C \subseteq C_\beta$ et C_β est une chaîne maximale dans $C \cup f[\beta]$ et $C_\gamma \subseteq C_\delta$ pour tout $\gamma < \delta \leq \beta$".

Cas où $\beta \neq 0$ est un ordinal limite. Alors $C_\beta := \cup_{\gamma<\beta} C_\gamma$. On a $C \subseteq C_\beta$ et $C_\gamma \subseteq C_\delta$ pour tout $\gamma < \delta \leq \beta$. Soit $x \in (C \cup f[\beta]) \setminus C_\beta$ et $\gamma < \beta$ tel que $x = f(\gamma)$. Or $C_{\gamma+1}$ est maximale dans $C \cup f[\gamma + 1]$, donc $C_{\gamma+1} \cup \{x\}$ n'est pas une chaîne, donc $C_\beta \cup \{x\}$ non plus. Ainsi, C_β est une chaîne maximale dans $C \cup f[\beta]$.

$\square$

Lemme de Zorn-Kuratowski

Theorem (Lemme de Zorn-Kuratowski, en supposant AC)

Soit un ordre partiel strict non-vide $(E, \prec)$ *tel que toute chaîne non vide a un majorant. Alors* E *a un élément maximal.*

Proof.

Par le principe de maximalité de Hausdorff, soit C une chaîne maximale (potentiellement un singleton). Soit m un majorant de C. Mq que m est maximal dans E. Soit $y \in E$ tel que $m < y$. Alors pour tout $x \in C$, on a $x \leq m < y$, donc $x < y$. Ainsi $y \notin C$ et $C \cup \{y\}$ est une chaîne, contredisant la maximalité de C. $\square$

“Réciproque” du lemme de Zorn-Kuratowski

Lemma

La première assertion ci-dessous implique la deuxième.

1. *Pour tout ordre partiel non-vide abritraire $(E, \prec)$, si toute chaîne non vide a un majorant, alors E a un élément maximal.*
2. *AC est vrai.*

Proof.

On montre que Zorn-Kuratowski implique le théorème du bon ordre. Soit B l'ensemble des bons ordres sur des parties de E. On ordonne B ainsi : $<$ est plus petit que $<'$ si c'en est un segment initial. Toute chaîne non vide a un majorant : l'union des membres de la chaîne. Il existe donc un bon ordre $<$ maximal. Mq son domaine est E. Sinon soit $a \in E \setminus dom(<)$ et $<'$ de domaine $dom(<) \cup \{a\}$ tel que pour tout $x < y$ on pose $x <' y$ et pour tout $x \in dom(<)$ on pose $x <' a$. Alors $<'$ est un bon ordre contredisant la maximalité de $<$. □

AC et cardinalité

Lemma (En supposant AC)

Tout ensemble est équipotent à un cardinal, et $|A| \leq |B|$ *ssi* $A \precsim_{inj} B$.

Proof.

- Par le théorème du bon ordre, AC implique que tout ensemble est bien ordonnable, donc chaque ensemble est équipotent à un unique cardinal.
- On sait déjà que $|A| \leq |B|$ ssi $|A| \precsim_{inj} |B|$. (Pour des ensembles bien ordonnables, sans supposer AC.)

$\square$

AC et surjection

Lemma (En supposant AC)

S'il existe une surjection de A dans B, alors il existe une injection de B dans A.

Proof.

En TD. $\square$

Lemma (En supposant AC)

S'il existe une surjection de A dans B et une surjection de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B.

Proof.

En TD. $\square$

- Les deux énoncés ci-dessus sont indépendants de ZF.
- Ce n'est pas connu s'ils sont équivalents à AC. (Relativement à ZF)

Partie infinie d'un ensemble dénombrable

Lemma

Toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Proof.

- Soit E une partie infinie de $\mathbb{N}$. Donc $(E, <)$ est isomorphe soit à $\omega = \mathbb{N}$, soit à un segment initial de ω. Or ces segments initiaux sont finis, donc E est isomorphe, donc équipotent, à $\mathbb{N}$.
- Soit E une partie infinie d'un ensemble dénombrable D. Soit $f : \mathbb{N} \to D$ une bijection. Donc $f^{-1}[E]$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, donc est dénombrable. Or E et $f^{-1}[E]$ sont en bijection par f, donc E est dénombrable.

$\square$

Corollary

S'il existe une injection d'un ensemble E infini vers un ensemble dénombrable, alors E est dénombrable.

L'axiome du choix dénombrable

- Axiome du choix dénombrable (AC_ω): tout ensemble dénombrable d'ensembles (quelconques) non vides a une fonction de choix.
- AC implique l'axiome du choix dénombrable. La réciproque n'est pas vraie, mais on ne le prouvera pas ici.

Ensemble infini et partie dénombrable

Lemma (Supposant l'axiome du choix dénombrable)

Tout ensemble infini à un sous-ensemble infini dénombrable.

Proof.

En TD. □

Union dénombrable d'ensembles dénombrables

Lemma (Supposant l'axiome du choix dénombrable)

L'union infinie dénombrable d'ensembles infinis dénombrables est infinie dénombrable.

Proof.

En TD. □

Axiome du choix dépendant

Lemma

Soit R une relation bien fondée sur un ensemble E. Alors il n'existe pas de ω-suite $\langle a_n : n < \omega \rangle$ telle que $a_{n+1} R a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si une telle suite existe, $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'a pas d'élément R-minimal. □

Axiome du choix dépendant : soit R une relation binaire sur un ensemble $E \neq \emptyset$. Supposons que pour tout $a \in E$ il existe $b \in E$ tel que bRa. Alors il existe une ω-suite $\langle a_n : n < \omega \rangle$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} R a_n$.

Lemma (Supposant l'axiome du choix dépendant)

Soit R une relation sur un ensemble E telle qu'il n'existe pas de ω-suite $\langle a_n : n < \omega \rangle$ telle que $a_{n+1} R a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors R est bien fondée.

Par contraposée. Supposons que R n'est pas bien fondée. Soit donc $\emptyset \neq F \subset E$ sans élément minimal. Donc pour tout $a \in F$ il existe $b \in F$ tel que bRa, donc par ACD il existe une ω-suite de F $\langle a_n : n < \omega \rangle$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} R a_n$, contradiction. □

Axiomes du choix et du choix dépendent

Lemma

Relatif à ZF, l'axiome du choix implique l'axiome du choix dépendent.

Proof.

Soit R une relation binaire sur un ensemble E. Supposons que pour tout $x \in E$ il existe $y \in E$ tel que yRx. I.e. $Rx := \{y \in E \mid yRx\} \neq \emptyset$. Soit $A := \{Rx \mid x \in E\}$. Par AC, soit $f : A \to E$ telle que $f(S) \in S$ pour tout $S \in A$, i.e. $f(Rx)Rx$ pour tout $x \in E$. Pour tout $x \in E$ soit $g(x) := f(Rx)$. Soit $x \in E$. Alors la ω-suite $\langle g^n(x) : n < \omega \rangle$ vérifie bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $g^{n+1}(x) R g^n(x)$. $\square$

La réciproque est fausse, mais on ne le prouvera pas ici.

Axiomes du choix, dépendent et dénombrable

Lemma

Relatif à ZF, l'axiome du choix dépendent implique l'axiome du choix dénombrable.

Proof.

Soit E un ensemble dénombrable d'ensembles non vides. Soit $f : \mathbb{N} \to E$ une bijection. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $E_n := \{f(i) \mid i < n\}$. Soit C_n l'ensemble des fonctions de choix pour E_n, et $C := \cup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Mq pour tout $g \in C$, il existe $g' \in C$ telle que $g \subsetneq g'$. Soit n telle que $g \in C_n$. Soit $x \in f(n)$. Soit g' une extension de g (on rajoute $f(n)$ au domaine) telle que $g'(f(n)) := x$. Alors on a $g' \in C_{n+1}$. Par axiome du choix dépendant, il existe donc $\langle g_n : n < \omega \rangle$ telle que $g_n \subsetneq g_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Le domaine de g_n est un $E_{h(n)}$ avec $h(n)$ strictement croissante, donc progressive/inflationnaire. Donc h diverge. Soit $g := \cup_{n \in \mathbb{N}} g_n$. Alors $dom(g) = E$. Ainsi g est une fonction de choix pour E. $\square$

La réciproque est fausse, mais on ne le prouvera pas ici.

Les parties

Theorem (Cantor)

Pour tout ensemble E, on a $|E| < |\mathcal{P}(E)|$ (si E et $\mathcal{P}(E)$ ont un cardinal)

Proof.

$x \mapsto \{x\}$ est injective de E dans $\mathcal{P}(E)$. Mq il n'existe pas d'injection de $\mathcal{P}(E)$ dans E. Il suffit de montrer qu'il n'existe pas de surjection E dans $\mathcal{P}(E)$.
Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$. On définit $A := \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$. Supposons qu'il existe $y \in E$ tel que $f(y) = A$:

- si $y \notin f(y)$ alors $y \in A$ par définition de A. Or $A = f(y)$, contradiction.
- si $y \in f(y)$, alors $y \notin A$ par définition de A. Or $A = f(y)$, contradiction.

Donc il n'existe pas de $y \in E$ tel que $f(y) = A$. En particulier, f n'est pas surjective.

□

Remarque sur l'équipotence

Lemma

1. *Si A et B sont équipotents, $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ aussi.*
2. *Si A et B sont équipotents et C et D sont équipotents, alors A^C et B^D aussi.*

Exponentiation cardinale

- Pour des cardinaux κ, λ, on pose $Exp(\kappa, \lambda) := |\kappa^\lambda|$.
- On dénote $Exp(\kappa, \lambda)$ par κ^λ, attention aux ambiguités.

Lemma

Soit A un ensemble et $\kappa := |A|$. Alors $|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$.

Lemma

Ci-dessous les opérations sont cardinales.

1. $\kappa < 2^\kappa$
2. *Si* $\kappa < \lambda$ *alors* $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$.
3. *Si* $0 < \lambda < \mu$, *alors* $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.
4. $\kappa^0 = 1$; $1^\kappa = 1$; $0^\kappa = 0$ *si* $\kappa > 0$.
5. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$
6. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$
7. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

Autres propriétés de l'exponentiation

Lemma

Soient κ, λ deux cardinaux, λ infini.

1. *Si $2 \leq \kappa \leq \lambda$, alors $2^\lambda = \kappa^\lambda$.*
2. *Si $\lambda < \kappa \leq 2^\lambda$, alors $2^\lambda = \kappa^\lambda$.*
3. *Si $2^\lambda < \kappa$, alors $\kappa^\lambda \leq 2^\kappa$.*

Proof.

En TD $\square$

L'hypothèse du continu

Lemma

$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$

Proof.

D'une part $\kappa < 2^\kappa$ pour tout κ ; d'autre part $\aleph_1$ est le cardinal successeur de $\aleph_0$. □

- Hypothèse du continu : $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$
- Hypothèse généralisée du continu : pour tout ordinal α, $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.
- L'hypothèse (généralisée) du continu est indépendante de ZFC.

Lemma (Sous hypothèse généralisée du continu)

Si $\kappa \leq 2^\lambda$ sont deux cardinaux infinis, $\kappa^\lambda = \lambda^+$.

Proof.

En TD □