Chapitre IV : Récurrence bien fondée

Stéphane Le Roux stephane.le_roux@ens-paris-saclay.fr

ENS Paris-Saclay

2023-2024

Relation bien fondée

- Soit R une relation binaire sur un ensemble E. Pour tout $y \in E$, on note $Ry := \{x \in E \mid xRy\}$.
- $y \in S \subseteq E$ est appelé minimal pour R dans S si $Ry \cap S = \emptyset$.
- R est dite bien fondée si tout $S \subseteq E$ a un élément minimal.
- Un bon ordre est une relation bien fondée.
- $(\mathbb{N}, <)$ et $(\mathbb{N}, |)$ (divisibilité stricte) et $\{(n, n+1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont bien fondées.
- $(\mathbb{Z}, <)$ et $([0, 1], <)$ ne sont pas bien fondées.
- la relation préfixe pour des mots sur un alphabet fini est bien fondée.
- la relation préfixe pour des mots sur un alphabet infini est bien fondée.

Récurrence bien fondée

Theorem (Preuve par récurrence)

Soit R une relation bien fondée sur un ensemble E et $P \subseteq E$ telle que pour tout $y \in E$ on ait : si $Ry \subseteq P$, alors $y \in P$. Alors $P = E$.

Proof.

Supposons que $P \neq E$. Soit alors y minimal pour R dans $E \setminus P$. Donc par minimalité de y, pour tout $x \in Ry$, on a $x \in P$. I.e. $Ry \subseteq P$, donc $y \in P$ par l'hypothèse du théorème, contradiction. □

Theorem (Preuve par récurrence (variante))

Soit R une relation bien fondée sur un ensemble E et $\phi(x)$ une formule, telle que pour tout $y \in E$ on ait : si $\phi(x)$ pour tout $x \in Ry$, alors $\phi(y)$. Alors $\forall y \in E, \phi(y)$.

Proof.

Prendre $P := \{x \in E \mid \phi(x)\}$. □

Récursion bien fondée

Theorem (Récursion)

Soient R une relation bien fondée sur un ensemble E, un ensemble A, et une fonction g prenant deux arguments, un $x \in E$ et une fonction de Rx vers A, et renvoyant un élément de A. Il existe une unique fonction $f : E \to A$ telle que $f(x) = g(x, f|_{Rx})$ pour tout $x \in E$.

Proof.

On a besoin d'outils, cf transparents suivants. □

Hauteur d'une relation

Soit R une relation bien fondée sur un ensemble E. On définit (pour les ordinaux plus petit qu'un cardinal équipotent à aucune des parties de E):

- $E_0 := \emptyset$
- $E_{\alpha+1} := \{y \in E \mid Ry \subseteq E_\alpha)\}$
- Si α est limite non nul $E_\alpha := \cup_{\beta<\alpha} E_\beta$

Notons que $E_0 = \cup_{\beta<0} E_\beta$ et $E_1 := \{y \in E \mid Ry = \emptyset\}$.

Lemma

Pour tout ordinal α, on a $E_\alpha \subseteq E_{\alpha+1}$

Proof.

Par récurrence forte sur α.

- Cas $\alpha = 0$. Alors $E_0 = \emptyset \subseteq E_1$.
- Soient $\alpha \neq 0$ un ordinal et $y \in E_\alpha$. Soit x tel que xRy. Mq $x \in E_\alpha$.
  - Si $\alpha = \beta + 1$, alors $x \in E_\beta$ car $y \in E_{\beta+1}$. Donc $x \in E_{\beta+1}$ par HR.
  - Si α est limite, soit $\beta < \alpha$ tel que $y \in E_\beta$. Alors $y \in E_{\beta+1}$ par HR, donc $x \in E_\beta \subseteq E_\alpha$.

  Dans les deux cas $x \in E_\alpha$. Ainsi $y \in E_{\alpha+1}$.

Hauteur d'une relation (II)

- $E_0 := \emptyset$
- $E_{\alpha+1} := \{y \in E \mid Ry \subseteq E_\alpha)\}$
- Si α est limite non nul $E_\alpha := \cup_{\beta<\alpha} E_\beta$

Lemma

Pour des ordinaux $\alpha < \beta$, on a $E_\alpha \subseteq E_\beta$

Proof.

Mq $E_\alpha \subseteq E_{\alpha+\gamma}$ par récurrence sur γ.

- Clair pour $\gamma = 0$
- Si $\gamma = \delta + 1$, alors $E_\alpha \subseteq E_{\alpha+\delta}$ par HR, et $E_{\alpha+\delta} \subseteq E_{\alpha+\delta+1}$ par un lemme précédent.
- Si γ est limite non nul, alors $\alpha + \gamma$ aussi par un lemme précédent et $E_{\alpha+\gamma} = \cup_{\delta<\alpha+\gamma} E_\delta$. Or $\alpha < \alpha + \gamma$, donc $E_\alpha \subseteq E_{\alpha+\gamma}$.

Or $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$, donc $E_\alpha \subseteq E_{\alpha+(\beta-\alpha)} = E_\beta$. $\square$

Hauteur d'une relation (III)

Lemma

Il existe un ordinal θ tel que $E_{\theta+1} = E_\theta$.

Proof.

Soit $\phi(x, \alpha, E, R)$ qui dit que $x \in E$ et que α est le plus petit ordinal tel que $x \in E_\alpha$. Par remplacement, soit A l'ensemble de ces ordinaux. Soit $\theta := \sup A$. Alors $E_\theta = E_{\theta+1}$, sinon il existe $x \in E_{\theta+1} \setminus E_\theta$, i.e. $(\sup A) + 1$ est le plus petit ordinal pour ce x, contradiction. □

Hauteur d'une relation (IV)

Lemma

$E_\theta = E_{\theta+1}$ implique $E_\alpha = E$ pour tout $\alpha \geq \theta$.

Proof.

Supposons que $E_\theta \neq E$. Alors soit y minimal pour R dans $E \setminus E_\theta$. Pour tout $x \in Ry$, on a $x \in E_\theta$. Donc $y \in E_{\theta+1}$, contradiction. Ainsi $E_\theta = E$. Or $E_\theta \subseteq E_\alpha$ pour tout $\alpha \geq \theta$, d'où le résultat. $\square$

Le plus petit θ tel que $E_\theta = E_{\theta+1}$ est noté $\lambda(R)$ et appelé la hauteur de R.

Récursion bien fondée : la preuve

Lemma

Soit R une relation bien fondée sur un ensemble E. Soit α un ordinal et R_α la restriction de R à E_α ($= E_\alpha^R$).

1. *Si $\beta \leq \alpha$ alors $(E_\alpha)_\beta^{R_\alpha} = E_\beta$.*
2. *Si $\alpha \leq \beta$ alors $(E_\alpha)_\beta^{R_\alpha} = E_\alpha$.*
3. *Si $x \in E_\alpha$ alors $R_\alpha x = Rx$.*
4. *Si $\alpha < \lambda(R)$, alors $\lambda(R_\alpha) = \alpha$*

Proof.

1. TD.
2. Car $(E_\alpha)_\alpha^{R_\alpha} = E_\alpha$, par croissance et car $dom(R_\alpha) = E_\alpha$
3. $\forall x \in E_\alpha, Rx \subseteq E_\alpha$, donc $Rx = (R \cap (E_\alpha \times E_\alpha))x = R_\alpha x$.
4. Par double inégalité. D'une part, $(E_\alpha)_\alpha^{R_\alpha} = (E_\alpha)_{\alpha+1}^{R_\alpha} = E_\alpha$, donc $\lambda(R_\alpha) \leq \alpha$. D'autre part, pour tout $\beta < \alpha$, on a $(E_\alpha)_\beta^{R_\alpha} = E_\beta \subsetneq E_\alpha = (E_\alpha)_\alpha^{R_\alpha}$, donc $\beta < \lambda(R_\alpha)$. D'où $\alpha \leq \lambda(R_\alpha)$.

Récursion bien fondée : la preuve (II)

Theorem (Récursion)

Soient R une relation bien fondée sur un ensemble E, un ensemble A, et une fonction g prenant deux arguments, un $x \in E$ et une fonction de Rx vers A, et renvoyant un élément de A. Il existe une unique fonction $f : E \to A$ telle que $f(x) = g(x, f|_{Rx})$ pour tout $x \in E$.

Preuve de l'unicité.

Soit f et f' vérifiant la propriété. S'il existe un $x \in E$ tel que $f(x) \neq f'(x)$, alors prenons-en un R-minimal. Ainsi $f|_{Rx} = f'|_{Rx}$, donc $f(x) = g(x, f|_{Rx}) = g(x, f'|_{Rx}) = f'(x)$, contradiction. $\square$

Récursion bien fondée : la preuve (III)

Theorem (Récursion)

Soient R une relation bien fondée sur un ensemble E, un ensemble A, et une fonction g prenant deux arguments, un $x \in E$ et une fonction de Rx vers A, et renvoyant un élément de A. Il existe une unique fonction $f : E \to A$ telle que $f(x) = g(x, f|_{Rx})$ pour tout $x \in E$.

Preuve de l'existence.

On procède par récurrence sur la hauteur λ de R. Si $\lambda = 0$, alors $\emptyset = E_0 = E_1 = E$, donc la fonction $f : \emptyset \to A$ convient.

Préliminaires avant les cas "limite" et "successeur". Soit $\alpha < \lambda$, alors $(E_\alpha)_\alpha^{R_\alpha} = (E_\alpha)_{\alpha+1}^{R_\alpha} = E_\alpha$ et $\lambda(R_\alpha) = \alpha$ par un lemme précédent. Soit g_α la restriction de g aux x dans E_α. Par HR, soit $f_\alpha : E_\alpha \to A$ telle que $\forall x \in E_\alpha, f_\alpha(x) = g_\alpha(x, f_\alpha|_{R_\alpha x}) = g_\alpha(x, f_\alpha|_{Rx})$.
Notons que pour tout $\alpha < \beta < \lambda$, on a $f_\alpha \subseteq f_\beta$. (On pourrait le montrer par récurrence sur β.) □

Récursion bien fondée : la preuve (IV)

Theorem (Récursion)

Soient R une relation bien fondée sur un ensemble E, un ensemble A, et une fonction g prenant deux arguments, un $x \in E$ et une fonction de Rx vers A, et renvoyant un élément de A. Il existe une unique fonction $f : E \to A$ telle que $f(x) = g(x, f|_{Rx})$ pour tout $x \in E$.

Preuve de l'existence.

Si $\lambda = \alpha + 1$, soit $f : E \to A$ définie comme suit :

$$f(x) := \begin{cases} f_\alpha(x) \text{ si } x \in E_\alpha \\ g(x, f_\alpha|_{Rx}) \text{ sinon} \end{cases}$$

- Pour tout $x \in E_\alpha$, on a $f(x) = f_\alpha(x) = g_\alpha(x, f_\alpha|_{R_\alpha x}) = g(x, f|_{Rx})$.
- pour tout $x \in E \setminus E_\alpha$, on a $f(x) = g(x, f_\alpha|_{Rx}) = g_\alpha(x, f|_{Rx})$

$\square$

Récursion bien fondée : la preuve (V)

Theorem (Récursion)

Soient R une relation bien fondée sur un ensemble E, un ensemble A, et une fonction g prenant deux arguments, un $x \in E$ et une fonction de Rx vers A, et renvoyant un élément de A. Il existe une unique fonction $f : E \to A$ telle que $f(x) = g(x, f|_{Rx})$ pour tout $x \in E$.

Preuve de l'existence.

Si λ est un ordinal limite.
Ainsi la relation $f := \cup_{\alpha<\lambda} f_\alpha$ est bien définie et est une fonction. De plus $dom(f) = \cup_{\alpha<\lambda} E_\alpha = E_\lambda = E$. De plus, pour tout $x \in E$ on a $f(x) = f_\alpha(x)$ pour un $\alpha < \lambda$, donc $f(x) = g_\alpha(x, f_\alpha|_{Rx}) = g(x, f|_{Rx})$.

□

Le rang

- Pour tout $x \in E$, soit $\rho(x)$ le plus petit ordinal tel que $x \in E_{\rho(x)+1}$.
- On appelle $\rho(x)$ le rang de x pour la relation R.
- $E_0 = \emptyset$, et si $Rx = \emptyset$ alors $x \in E_1$, donc $\rho(x) = 0$.

Lemma

Si xRy alors $\rho(x) < \rho(y)$. (La réciproque n'est pas vraie.)

Proof.

(Rappel $E_{\alpha+1} := \{y \in E \mid Ry \subseteq E_\alpha)\}$ et si α est limite non nul $E_\alpha := \cup_{\beta<\alpha} E_\beta$.) On a $y \in E_{\rho(y)+1}$, donc $x \in E_{\rho(y)}$. Si $\rho(y) = \alpha + 1$, alors $x \in E_{\alpha+1}$, donc $\rho(x) \leq \alpha$. Si $\rho(y)$ est limite, soit $\alpha < \rho(y)$ tel que $x \in E_\alpha$. Alors $x \in E_{\alpha+1}$, donc $\rho(x) \leq \alpha < \rho(y)$. $\square$

Lemma

Soient α un ordinal et B un ensemble d'ordinaux tels que pour tout $\gamma < \alpha$ il existe $\beta \in B$ tel que $\gamma < \beta$. Alors $\alpha \leq \sup B$.

Rang et prédécesseur

Lemma

$\rho(y) = \sup\{\rho(x) + 1 \mid x \in Ry\}$

Proof.

Par double inégalité.

- Pour tout $x \in Ry$, on a $\rho(x) + 1 \leq \rho(y)$ par un lemme précédent, donc $\sup_{x \in Ry}(\rho(x) + 1) \leq \rho(y)$.
- Soit $\alpha < \rho(y)$. Vers une contradiction, supposons que pour tout $x \in Ry$ on ait $\rho(x) < \alpha$, i.e. $x \in E_{\rho(x)+1} \subseteq E_\alpha$. Alors $y \in E_{\alpha+1}$, donc $\rho(y) \leq \alpha$, contradiction. Donc $\forall \alpha < \rho(y) \exists x \in Ry(\alpha < \rho(x) + 1)$. Par un lemme précédent, on a donc $\rho(y) \leq \sup_{x \in Ry}(\rho(x) + 1)$.

□

Lemma

Le rang est l'unique fonction vérifiant $\rho(y) = \sup\{\rho(x) + 1 \mid x \in Ry\}$.

Rang et hauteur d'une relation

Lemma

$\lambda(R) = \sup\{\rho(x) + 1 \mid x \in E\}$.

Proof.

Par double inégalité.

- Pour tout $x \in E$ on a $x \in E_{\rho(x)+1} \setminus E_{\rho(x)}$, donc $\rho(x) < \lambda(R)$. Ainsi $\sup_{x \in E}(\rho(x) + 1) \leq \lambda(R)$.
- Soit $\alpha < \lambda(R)$. Alors $E_{\alpha+1} \neq E_\alpha$. Soit $x \in E_{\alpha+1} \setminus E_\alpha$, donc $\rho(x) = \alpha$. Donc pour tout $\alpha < \lambda(R)$ il existe $x \in E$ tel que $\alpha < \rho(x) + 1$. Donc $\lambda(R) \leq \sup_{x \in E}(\rho(x) + 1)$.

$\square$