Chapitre III : Cardinaux

Stéphane Le Roux stephane.le_roux@ens-paris-saclay.fr

ENS Paris-Saclay

2023-2024

Ordinal cardinal

- Deux ensembles sont dits équipotents s'ils sont en bijection.
- Un ordinal est dit cardinal s'il n'est équipotent à aucun ordinal plus petit que lui.
- ω est donc un cardinal, car ω est infini et tout $n < \omega$ est fini.
- Tout $n < \omega$ est aussi un cardinal.

Lemma

Tout cardinal infini est un ordinal limite.

Proof.

Soit α un ordinal infini, alors $\alpha + 1$ est équipotent à α. En effet, soit $f : \alpha + 1 \to \alpha$ telle que $f(\alpha) := 0$ et $f(n) := n + 1$ pour tout $n < \omega$, et f est l'identité sinon. Alors f est une bijection (mais pas un isomorphisme de bon ordre !) $\square$

Cardinal d'un ordinal

Lemma

Pour tout ordinal, il existe l'ordinal le plus petit qui lui est équipotent. C'est un ordinal cardinal.

Proof.

Soit α un ordinal. La collection des ordinaux plus petits que ou égal à et équipotent à α est un ensemble non-vide, car α est dedans. Cet ensemble a donc un minimum. Par minimalité c'est un cardinal. $\square$

- Le cardinal d'un ordinal est le plus petit ordinal qui lui est équipotent.
- On note $|\alpha|$ le cardinal de α.
- Le cardinal de $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$ est ω : la fonction $f : \omega \to \omega \cdot 2$ telle que $f(2n) := n$ et $f(2n+1) := \omega + n$ est une bijection (mais pas un isomorphisme de bon ordre !)
- Tout bon ordre est isomorphe à un unique ordinal, on peut donc lui associer un cardinal.

Divers

Lemma

1. $|\alpha| \leq \alpha$.
2. *Tout cardinal est son propre cardinal :* $||\alpha|| = |\alpha|$.
3. *Deux ordinaux sont équipotents ssi ils ont le même cardinal.*
4. *Pour des ordinaux* $\alpha < \beta$ *on a* $|\alpha| \leq |\beta|$. *(TD)*
5. *Pour des ordinaux* $\alpha < \beta < \gamma$, *si* $|\alpha| = |\gamma|$ *alors* $|\alpha| = |\beta|$.

Lemma

Soient $<_1$ *et* $<_2$ *deux bons ordres sur* A. *Soient* α_1 *et* α_2 *les ordinaux isomorphes respectifs. Alors* $|\alpha_1| = |\alpha_2|$

Proof.

$|\alpha_i|$ et α_i sont équipotents. α_i et A aussi. □

Tout ensemble bien ordonnable est donc équipotent à un (unique) ordinal cardinal, qu'on lui associe.

Bornes inférieures/supérieures et cardinaux

Lemma

Pout tout ensemble non-vide A de cardinaux, $\inf A = \cap A = \min A$.

Lemma

Pout tout ensemble A de cardinaux, $\sup A = \cup A$ *est un cardinal.*

Proof.

Soient $\alpha := \sup A$ et $\beta < \alpha$. Par définition du sup, soit $\kappa \in A$ tel que $\beta < \kappa \leq \alpha$. Donc $|\beta| \leq \beta < \kappa = |\kappa| \leq |\alpha|$, donc β n'est pas équipotent à α. □

Addition et multiplication cardinales

$\kappa +_k \lambda := |\kappa + \lambda|$ (Attention : $+_k$ pas notation usuelle)

Lemma

Soient deux ensembles bien ordonnables disjoints A et B. Alors $A \cup B$ est bien ordonnable et $|A \cup B| = |A| +_k |B|$.

Proof.

$A \cup B$ est équipotent à $|A| + |B|$, donc à $||A| + |B|| = |A| +_k |B|$. □

$\kappa \cdot_k \lambda := |\kappa \cdot \lambda|$ (Attention : $\cdot_k$ pas notation usuelle)

Lemma

Soient deux ensembles bien ordonnables A et B. Alors $A \times B$ est bien ordonnable et $|A \times B| = |A| \cdot_k |B|$.

Proof.

$A \times B$ est équipotent à $|A| \times |B|$, donc à $|A| \cdot |B|$, donc à $||A| \cdot |B|| = |A| \cdot_k |B|$. □

Addition et multiplication cardinales (II)

Lemma

1. *L'addition et la multiplication cardinales sont commutatives.*
2. *L'addition et la multiplication cardinales sont associatives.*
3. *La multiplication cardinale est distributive par rapport à l'addition.*
4. *Si* $\lambda \neq 0$, *alors* $\kappa \leq \kappa \cdot_k \lambda$

Proof.

1. L'union commute, et $A \times B$ est équipotent à $B \times A$.
2. L'union est associative et le produit cartésien aussi à bijection près.
3. Soit A, B, C des ensembles où B et C sont disjoints. Alors $|A \times (B \cup C)| = |A \times B \cup A \times C|$, donc $|A| \cdot_k |B \cup C| = |A \times B| +_k |A \times C|$, donc $|A| \cdot_k (|B| +_k |C|) = |A| \cdot_k |B| +_k |A| \cdot_k |C|$. De même pour la distributivité à droite.
4. En TD

Relation induite par une bijection

Lemma

Soient R une relation binaire sur A et $f : A \to B$ une bijection.

- *Il existe une unique relation R_f sur B telle que $f : (A, R) \to (B, R_f)$ soit un isomorphisme de relations.*
- $R_f = \{(b, b') \in B \times B \mid \exists a, a' \in A(f(a) = b \wedge f(a') = b' \wedge aRa')\}$
- *Si R est un bon ordre, R_f aussi.*

Des ordinaux et cardinaux de grande taille

Lemma

Soit A un ensemble, il existe un ordinal équipotent à aucune des parties de A.

Proof.

Par séparation, soit B l'ensemble des relations $R \in \mathcal{P}(A \times A)$ telles que $dom(R) = cod(R)$ et qui sont des bons ordres sur $dom(R)$. Pour chaque bon ordre $R \in B$, il existe un unique ordinal isomorphe.
Soit $\phi(R, \alpha, B)$ qui dit que $R \in B$ et est isomorphe à l'ordinal α. Alors ϕ est fonctionnelle. Par remplacement, soit C l'ensemble de ces ordinaux. Soit $\alpha := (\cup C) + 1 = (\sup C) + 1$, qui est ainsi plus grand que chaque $\gamma \in C$. Vers une contradiction, soit $f : \alpha \to A$ injective. Alors f induit un bon ordre $<_f$ sur $f[\alpha]$, donc $<_f \in B$. Soit donc l'ordinal $\beta \in C$ isomorphe à $<_f$. Or $<_f$ est isomorphe à α, donc $\beta = \alpha$, contradiction. Donc une telle f n'existe pas, donc α n'est équipotent à aucune partie de A. □

Des ordinaux et cardinaux de grande taille (II)

Lemma (Rappel)

Pout tout ensemble, il existe un ordinal équipotent à aucune des parties.

Corollary

Pour tout ensemble, il existe un cardinal équipotent à aucune des parties.

Proof.

Prendre le cardinal de l'ordinal du lemme précédent. □

Corollary

Pour tout ordinal α, il existe un cardinal plus grand que $|\alpha|$.

Proof.

Il existe un ordinal β équipotent à aucune des parties de α, donc plus grand que α et tel que $|\beta| \neq |\alpha|$, donc $|\alpha| < |\beta|$. □

Les cardinaux infinis

Pour tout ordinal α, on note α^+ le plus petit cardinal strictement plus grand que α, i.e. "successeur" du cardinal $|\alpha|$. On définit :

- $\omega_0 := \omega$
- $\omega_{\alpha+1} := (\omega_\alpha)^+$
- Pour tout ordinal limite non nul α, on pose $\omega_\alpha := \sup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$.

Lemma

Pour tout ordinal α, ω_α est un cardinal.

Proof.

Par récurrence sur α.

- $\omega_0 = \omega$ par définition, et ω est un cardinal.
- Si $\alpha = \beta + 1$ et ω_β cardinal, alors $\omega_\alpha = \omega_\beta^+$, donc est un cardinal.
- Si α est limite, ω_α est la borne supérieure d'un ensemble de cardinaux, donc est cardinal.

□

Les cardinaux infinis (II)

- $\omega_0 := \omega$
- $\omega_{\alpha+1} := (\omega_\alpha)^+$
- Pour tout ordinal limite non nul α, on pose $\omega_\alpha := \sup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$.

Lemma

1. *Si $\alpha < \beta$ alors $\omega_\alpha < \omega_\beta$.*
2. $\alpha < \omega_\alpha$

Lemma

Pour tout cardinal infini κ, il existe un ordinal α tel que $\kappa = \omega_\alpha$

Proof.

plus tard □

Les cardinaux infinis (III)

Pour tout ordinal α, on note $\aleph_\alpha := \omega_\alpha$ quand on veut insister sur le cardinal plutôt que l'ordinal. $\aleph$ s'écrit aussi aleph.

On va montrer sur les transparents suivants que $\aleph_\alpha \cdot_k \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ pour tout ordinal α.

Corollary

Pour tous cardinaux infinis κ, λ, on a $\kappa +_k \lambda = \kappa \cdot_k \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

Proof.

$\max(\kappa, \lambda) \leq \kappa +_k \lambda \leq \kappa \cdot_k \lambda \leq \max(\kappa, \lambda) \cdot_k \max(\kappa, \lambda) = \max(\kappa, \lambda)$. □

Bon ordre canonique pour les couples d'ordinaux

On définit un ordre sur les couples d'ordinaux ($\neq$ pour la multiplication).
On pose $(\alpha, \beta) <_c (\gamma, \delta)$ dans chacun des cas suivants :

- $\max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta)$,
- $\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta)$ et $\alpha < \gamma$,
- $\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta)$ et $\alpha = \gamma$ et $\beta < \delta$.

Lemma

1. *$<_c$ est un ordre total.*
2. *Tout ensemble $E \neq \emptyset$ de couples d'ordinaux a un $<_c$-minimum. (TD)*
3. *Pour tout α, $\alpha \times \alpha$ est le segment initial engendré par $(0, \alpha)$. (TD ?)*

- Pour des ordinaux α, β on note $\Gamma(\alpha, \beta)$ l'ordinal isomorphe au segment initial engendré par (α, β) (pour $<_c$).
- On a $\sup_{\beta,\delta<\alpha} \Gamma(\beta, \delta) = \cup_{\beta,\delta<\alpha}\Gamma(\beta, \delta) = \{\Gamma(\beta, \delta) \mid (\beta, \delta) \in \alpha \times \alpha\} =$ $= \Gamma[\alpha \times \alpha]$. (Attention $\Gamma[\alpha \times \alpha] \neq \Gamma(\alpha, \alpha)$.)
- Exemple : $\Gamma[\omega \times \omega] = \omega$.

Bon ordre canonique pour les couples d'ordinaux (II)

Lemma

1. *Tout ensemble $E \neq \emptyset$ de couples d'ordinaux a un $<_c$-minimum. (TD)*
2. *Pour tout α, $\alpha \times \alpha$ est le segment initial engendré par $(0, \alpha)$. (TD ?)*

- Pour des ordinaux α, β on note $\Gamma(\alpha, \beta)$ l'ordinal isomorphe au segment initial engendré par (α, β) (pour $<_c$).
- On note que $\sup_{\beta,\delta<\alpha} \Gamma(\beta, \delta) = \Gamma[\alpha \times \alpha]$.

Lemma

1. $(\alpha, \beta) <_c (\gamma, \delta)$ *ssi* $\Gamma(\alpha, \beta) < \Gamma(\gamma, \delta)$. *(Par définition de Γ.)*
2. $|\Gamma[\alpha \times \beta]| = |\alpha \times \beta| = |\alpha| \cdot_k |\beta|$. *(Cf produit cartésien.)*

Multiplication des cardinaux infinis

Theorem

Pour tout cardinal infini κ, on a $\kappa \cdot_k \kappa = \kappa$.

Proof.

Vers une contradiction, soit κ minimal parmi les cardinaux tel que $\kappa \neq \kappa \cdot_k \kappa$. (Moralement, on fait une récurrence.) Or $\kappa \leq \kappa \cdot_k \kappa$, donc $\kappa < \kappa \cdot_k \kappa = |\Gamma[\kappa \times \kappa]| \leq \Gamma[\kappa \times \kappa]$. Soient donc deux ordinaux $\beta, \gamma < \kappa$ tels que $\Gamma(\beta, \gamma) > \kappa$. Or κ est un ordinal limite, soit donc un ordinal δ tel que $\beta, \gamma < \delta < \kappa$. Comme $\delta \times \delta$ est un segment initial de l'ordre canonique $<_c$ (engendré par $(0, \delta)$), et comme $\delta \times \delta$ contient (β, γ), on a aussi $\kappa < \Gamma[\delta \times \delta]$, donc $|\delta| \leq \delta < \kappa \leq |\Gamma[\delta \times \delta]| = |\delta| \cdot_k |\delta|$. Or δ est infini car β et γ ne peuvent pas être tous les deux finis. Donc $|\delta| < |\delta| \cdot_k |\delta|$ contrededit la minimalité de κ. $\square$

Produits Cartésiens et cardinaux

Theorem (Rappel)

Pour tout cardinal infini κ, on a $\kappa \cdot_k \kappa = \kappa$.

Corollary

Soit $A_1, \ldots, A_n$ un nombre fini d'ensembles infinis, équipotents, bien ordonnables. Alors $|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1|$.

Un ensemble est dit infini dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, i.e. de cardinal $\aleph_0$.

Corollary

$\mathbb{N}^k$ *est dénombrable pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Théorème de Cantor-Schröder-Berstein

- On aimerait comparer la taille des ensembles avec un préordre total, i.e. une relation binaire réflexive, transitive, et totale.
- On voudrait que les ensembles soient de même taille ssi ils sont en bijection.
- On note $A \precsim_{inj} B$ s'il existe une fonction injective de A dans B. On note $A \prec_{inj} B$ si $A \precsim_{inj} B$ et $\neg(B \precsim_{inj} A)$. On note $A \sim_{inj} B$ si $A \precsim_{inj} B$ et $B \precsim_{inj} A$.
- $\precsim_{inj}$ est un préordre, i.e. réflexif et transitif, sur la classe des ensembles.
- On aimerait un préordre total, mais ce n'est pas le cas avec les axiome actuels.
- Mais $A \sim_{inj} B$ ssi A et B sont équipotents, cf ci-dessous.

Theorem (Cantor-Schröder-Berstein)

S'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B.

La taille des ensembles bien ordonnables

Rappel : tout ensemble bien ordonnable est équipotent à un (unique) ordinal cardinal, qu'on lui associe.

Lemma

- *Pour A et B bien ordonnables, on a*
  - $A \precsim_{inj} B$ *ssi* $|A| \leq |B|$.
  - $A \sim_{inj} B$ *ssi* $|A| = |B|$ *ssi* A *et* B *sont équipotents.*
  - $A \prec_{inj} B$ *ssi* $|A| < |B|$.
- *Sur la classe des ensembles bien ordonnables,* $\precsim_{inj}$ *est donc un bon préordre total.*

Preuve de $A \precsim_{inj} B$ ssi $|A| \leq |B|$.

- Si $|A| \leq |B|$, alors soit $f : |A| \to |B|$ telle que $f(\alpha) := \alpha$. Soit $g : A \xrightarrow{\sim} |A|$ et $h : |B| \xrightarrow{\sim} B$. Alors $h \circ f \circ g\ A \to B$ est injective.
- Soit $f : A \to B$ injective. Soit $<_A$ et $<_B$ bons ordres sur A et B respectivement. Alors $(f[A], <_{A,f})$ est un bon ordre, isomorphe à un ordinal α. Or $(B \setminus f[A], <_B |_{B \setminus f[A]})$ est aussi un bon ordre, isomorphe à un ordinal γ. Alors $|B| = |\alpha + \gamma| \geq |\alpha| = |A|$.

Pourquoi injection et pas surjection ?

1. Pourquoi n'utilise-t-on pas des surjections pour comparer les tailles ?
2. A-t-on "S'il existe un surjection de A dans B et une surjection de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B" ?

Lemma

S'il existe une injection de A dans B, il existe une surjection de B dans A.

- La réciproque n'est pas vraie avec nos axiomes actuels.
- De même, la réponse à la question 2 est non avec nos axiomes actuels.