Chapitre II : Ordinaux

Stéphane Le Roux stephane.le_roux@ens-paris-saclay.fr

ENS Paris-Saclay

2023-2024

Ensembles ordonnés

Soit E un ensemble. Un ordre strict sur E est une relation binaire $<$ transitive et irreflexive.

- Transitive : $\forall x, y, z \in E((x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z)$
- Irréflexive : $\forall x \in E(\neg x < x)$
- On note $x \leq y$ si $x < y$ ou $x = y$.
- La relation $\leq$ est transitive, réflexive et antisymmétrique, i.e. $\leq$ est un ordre.
- $x \in E$ est un élément maximal si $\forall y \in E(\neg x < y)$.
- $x \in E$ est le plus grand élément (ou le maximum) de E si $\forall y \in E(y \leq x)$.
- $x \in E$ est un majorant de $S \subseteq E$, si $\forall y \in S(y \leq x)$.
- $x \in E$ est la borne supérieure (ou le supremum) de $S \subseteq E$, si c'est le plus petit élément des majorants de S.
- Si en plus $x \neq y$ implique $x < y$ ou $y < x$, l'ordre est dit total.

Isomorphisme d'ordres

Soient $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ deux ensembles ordonnés.

- $f : E \to F$ est strictement croissante si $\forall x, y \in E (x <_E y \Rightarrow f(x) <_F f(y))$.
- $f : E \to F$ est un isomorphisme si f est bijective et $\forall x, y \in E (x <_E y \Leftrightarrow f(x) <_F f(y))$.
  On note alors $f : E \xrightarrow{\sim} F$ ou $E \approx F$ sans spécifier f.

Lemma

Tout isomorphisme d'ordre est strictement croissant.

Lemma

La réciproque d'un isomorphisme d'ordre est un isomorphisme d'ordre

Proof.

f est bijective, donc f^{-1} aussi. Soient $z, t \in F$, alors $f^{-1}(z) <_E f^{-1}(t) \Leftrightarrow z = f(f^{-1}z) <_F f(f^{-1}(t)) = t$. $\square$

Isomorphisme d'ordres (II)

Soient $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ deux ensembles ordonnés.

- $f : E \to F$ est strictement croissante si $\forall x, y \in E(x <_E y \Rightarrow f(x) <_F f(y))$.
- $f : E \to F$ est un isomorphisme si f est bijective et $\forall x, y \in E(x <_E y \Leftrightarrow f(x) <_F f(y))$.
  On note alors $f : E \xrightarrow{\sim} F$ ou $E \approx F$ sans spécifier f.

Lemma

Soient $f : (E, <_E) \to (F, <_F)$ un isomorphisme d'ordre et $A \subseteq E$. Alors $f|_A : A \to f[A]$ est aussi un isomoprhisme d'ordre.

Proof.

$f|_A$ est bijective et $\forall x, y \in A(x <_E y \Leftrightarrow f(x) <_F f(y))$. $\square$

Isomorphisme d'ordres (III)

Soient $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ deux ensembles ordonnés.

- $f : E \to F$ est strictement croissante si $\forall x, y \in E(x <_E y \Rightarrow f(x) <_F f(y))$.
- $f : E \to F$ est un isomorphisme si f est bijective et $\forall x, y \in E(x <_E y \Leftrightarrow f(x) <_F f(y))$.
  On note alors $f : E \xrightarrow{\sim} F$ ou $E \approx F$ sans spécifier f.

Lemma

Si $<_E$ est total et f est surjective et strictement croissante, alors f est un isomorphisme.

Proof.

- f est injective : si $x \neq y$, alors $x <_E y$ ou $y <_E x$ par totalité de $<_E$, donc $f(x) <_F f(y)$ ou $f(y) <_F f(x)$, donc $f(x) \neq f(y)$.
- Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) <_F f(y)$. Alors $x \neq y$. Si $y <_E x$ alors $f(y) <_F f(x)$, contradiction. Par totalité de $<_E$, on a $x <_E y$.

□

Bon ordre

Un ordre strict $<$ sur E est un bon ordre, si toute partie non-vide de E a un plus petit élément pour $<$. (Plus tard : ordinaux + récurrences)

Lemma

1. *Un bon ordre est un ordre total.*
2. *La restriction d'un bon ordre à un sous-ensemble est un bon ordre.*

Lemma

Soit $(B, <)$ *un bon ordre et* $f : B \to B$ *strictement croissante. Alors* $x \leq f(x)$ *pour tout* $x \in B$.

Proof.

Pour tout $y \in E := \{x \in B \mid f(x) < x\}$, on a $f(y) < y$ donc $f(f(y)) < f(y)$ par croissance stricte, donc $f(y) \in E$. Ainsi E n'a pas de minimum, donc E est vide. $\square$

Une application telle que $x \leq f(x)$ pour tout x est dite progressive, expansive, inflationnaire. (Pas de terminologie universelle.)

Isomorphismes de bons ordres

Lemma

Le seul automorphisme d'un bon ordre $(B, <)$ est l'identité.

Proof.

Soient f un automorphisme de $(B, <)$ et $x \in B$. Alors f est strictement croissante, donc progressive, donc $x \leq f(x)$. Mais f^{-1} est aussi un isomorphisme d'ordre, donc est strictement croissante, donc progressive, donc $x \leq f^{-1}(x)$, donc $f(x) \leq x$. Ainsi $f(x) = x$. $\square$

Lemma

Entre deux bons ordres $(A, <_A)$ et $(B, <_B)$ il existe au plus un isomorphisme.

Proof.

Soient f, g des isomorphisme de $(A, <_A)$ vers $(B, <_B)$. Alors $g^{-1} \circ f$ et $f^{-1} \circ g$ sont des automorphismes de $(A, <_A)$, donc l'identité de A. $\square$

Segments initiaux et ensembles fermés inférieurement

Soit un ordre $(E, <)$.

- Un sous-ensemble $S \subseteq E$ est fermé inférieurement si $\forall x \in S \forall y \in E (y < x \Rightarrow y \in S)$.
- Pour tout $x \in E$, l'ensemble $E(x) := \{y \in E \mid y < x\}$ est appelé le segment initial engendré par x.

Lemma

Un segment initial est un sous-ensemble fermé inférieurement.

Segments initiaux et ensembles fermés inférieurement (II)

Soit un ordre $(E, <)$.

- Un sous-ensemble $S \subseteq E$ est fermé inférieurement si $\forall x \in S \forall y \in E (y < x \Rightarrow y \in S)$.
- Pour tout $x \in E$, l'ensemble $E(x) := \{y \in E \mid y < x\}$ est appelé le segment initial engendré par x.

Lemma

Dans un bon ordre, un sous-ensemble fermé inférieurement est soit un segment initial soit l'ensemble entier.

Proof.

Soient $(B, <)$ un bon ordre et $S \subsetneq B$ fermé inférieurement. Soit $x := \min B \setminus S$, alors $S = B(x)$, prouvé ci-dessous :

- Si $y \in B(x)$ alors $y < x$, donc $y \in S$ par définition de x.
- Si $y \in S$, alors $y < x$, car $x < y$ impliquerait $x \in S$. Donc $y \in B(x)$.

$\square$

Segment initiaux et isomorphismes de bons ordres

Lemma

Soient $(B, <)$ un bon ordre, $x \in B$ et $E \subseteq B(x)$. Alors E et B ne sont pas isomorphes.

Proof.

Soit $f : B \to E$. Alors $f(x) \in E \subseteq B(x)$, i.e. $f(x) < x$, donc f n'est pas progressive/expansive/inflationnaire, donc pas strictement croissante, donc pas un isomorphisme. $\square$

Corollary

Soient $(B, <)$ un bon ordre et $x, y \in B$, distincts. Alors $B(x)$ et $B(y)$ ne sont pas isomorphes.

Segments initiaux et isomorphismes de bon ordre (II)

Lemma

Soient deux ordres isomorphes $(A, <_A)$ et $(B, <_B)$ et $f : A \overset{\sim}{\to} B$. Pour tout $x \in A$ on a $f|_{A(x)}^{B(f(x))} : A(x) \overset{\sim}{\to} B(f(x))$. Pour simplifier la preuve, on suppose que les ordres sont totaux.

Par un lemme précédent, il suffit de montrer que $f[A(x)] = B(f(x))$. Par croissance stricte de f, on a $x' \in A(x) \Rightarrow f(x') \in B(f(x))$. De même $y \in B(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(y) \in A(x)$. Donc $f[A(x)] = B(f(x))$.

Corollary

Soient deux bons ordres isomorphes $(A, <_A)$ et $(B, <_B)$.

- *Pour tout $x \in A$, il existe un unique $y \in B$ tel que $A(x) \approx B(y)$.*
- *L'application $x \mapsto y$ est l'isomorphisme de $(A, <_A)$ vers $(B, <_B)$.*

- Existence : soit $f : A \overset{\sim}{\to} B$, unique. Alors $y := f(x)$ convient.
- Unicité : soit $z \in B \setminus \{y\}$ tel que $A(x) \approx B(z)$. Alors $B(y) \approx B(z)$, contredisant un corollaire précédent.

Segments initiaux et isomorphismes de bon ordre (III)

Lemma

Soient deux bons ordres $(A, <_A)$ *et* $(B, <_B)$ *et* $f := \{(x, y) \in A \times B \mid A(x) \approx B(y))$. *Alors* $dom(f)$ *et* $cod(f)$ *sont fermés inférieurement,* $f : dom(f) \xrightarrow{\sim} cod(f)$*, et* $dom(f) = A$ *ou* $cod(f) = B$*.*

Proof.

- On sait déjà que $dom(f)$ et $cod(f)$ sont fermés inférieurement.
- Comme un segment initial n'est pas isomorphe au bon ordre d'origine, pour tout x il existe au plus un y, et réciproquement, donc f est une fonction injective. De plus, f est strictement croissante par un résultat précédent. Donc $f : dom(f) \xrightarrow{\sim} cod(f)$.
- Si $dom(f) \neq A$ et $cod(f) \neq B$, soient $x_0 := \min_{<_A} A \setminus dom(f)$ et $y_0 := \min_{<_B} B \setminus cod(f)$. Alors $dom(f) = A(x_0)$ et $cod(f) = B(y_0)$, donc $A(x_0) \approx B(y_0)$, i.e. $(x_0, y_0) \in f$, contradiction.

$\square$

Segments initiaux et isomorphismes de bon ordre

Theorem

Soient $(A, <_A)$ et $(B, <_B)$ deux bons ordres. Exactement une des trois assertions ci-dessous est vraie.

1. *$(A, <_A)$ et $(B, <_B)$ sont isomorphes.*
2. *$(A, <_A)$ est isomorphe à un unique segment initial de $(B, <_B)$.*
3. *$(B, <_B)$ est isomorphe à un unique segment initial de $(A, <_A)$.*

Proof.

Par le lemme précédent. □

Notons qu'à isomorphisme près, les bons ordres constituent un "bon ordre" (sur un domaine qui est une classe propre) pour la relation "est isomorphe à un segment initial de".

Sous-ensemble d'un bon ordre

Corollary

Soit $(B, <)$ *un bon ordre et* $E \subseteq B$*. Alors* $(E, < |_E)$ *est isomorphe à un sous-ensemble fermé inférieurement de* B*.*

Proof.

$(E, < |_E)$ est un bon ordre, donc par le théorème précédent (exactement) une des deux assertions ci-dessous est vraie.

- B est isomorphe à un segment initial de E.
- E est isomorphe à un sous-ensemble fermé inférieurement de B.

Si B est isomorphe à un segment initial de E, par exemple à $E(x)$ avec $x \in E$, alors B est isomorphe à $E(x) \subseteq B(x)$, contradiction. □

Ordinaux

Definition

Un ensemble est un nombre ordinal (ou juste ordinal) s'il est transitif et bien ordonné par l'appartenance $\in$. Dans ce contexte, on dénote $\in$ par $<$. Soit $Ord(\alpha)$ une formule qui exprime que α est un ordinal, ce qui est possible dans notre langage.

Lemma

Soit T un ensemble transitif et soit $x_0 \in \cdots \in x_n \in T$. Alors $x_0 \in T$.

Proof.

Par récurrence sur n. Vrai pour $n = 0$. Supposons la propriété vraie pour $n - 1 \in \mathbb{N}$. On a $x_n \in T$ donc $x_{n-1} \in x_n \subseteq T$, car T est transitif, donc $x_{n-1} \in T$. Par HR, $x_0 \in T$. $\square$

Lemma

$\emptyset$ est un ordinal.

Les éléments des ordinaux

Definition (Rappel)

Un ensemble est un nombre ordinal (ou juste ordinal) s'il est transitif et bien ordonné par l'appartenance $\in$. Dans ce contexte, on dénote $\in$ par $<$.

Lemma

Les éléments d'un ordinal sont des ordinaux.

Proof.

Soit α un ordinal et $\beta \in \alpha$. Mq β est un ordinal. Alors $\beta \subseteq \alpha$, car α est transitif.

- α est bien ordonné par $\in$, donc $\beta \subseteq \alpha$ aussi.
- Soit $\gamma \in \beta$, donc $\gamma \in \alpha$, donc $\gamma \subseteq \alpha$. Mq $\gamma \subseteq \beta$. Soit $x \in \gamma$, donc $x \in \alpha$. Comme α est totalement ordonné par $\in$, on a trois cas :
  - Cas $x = \beta$, alors $\beta \in \gamma \in \beta$, contredisant que $(\alpha, \in)$ est (bien) ordonné.
  - Cas $\beta \in x$, alors $\beta \in x \in \gamma \in \beta$, contredisant que $\in$ est (bien) ordonné.
  - Cas $x \in \beta$, le seul possible.

  Or cela vaut pour tout $x \in \gamma$, donc $\gamma \subseteq \beta$. Donc β est transitif.

Les éléments des ordinaux (II)

Definition (Rappel)

Un ensemble est un nombre ordinal (ou juste ordinal) s'il est transitif et bien ordonné par l'appartenance $\in$. Dans ce contexte, on dénote $\in$ par $<$.

Lemma (Rappel)

Les éléments d'un ordinal sont des ordinaux.

Corollary

1. *Tout ordinal est l'ensemble des ordinaux plus petits que lui.*
2. *Un ordinal est un segment initial de tout ordinal auquel il appartient, engendré par lui-même, i.e. si $\alpha \in \beta$, alors $\alpha = \beta(\alpha)$.*

Proof.

1. Clair.
2. $\beta(\alpha) = \{\gamma \in \beta \mid \gamma \in \alpha\}$. Or $\alpha \in \beta$ implique $\alpha \subseteq \beta$, donc $\beta(\alpha) = \{\gamma \in \alpha\} = \alpha$.

Inclusion d'ordinaux et appartenance

Lemma

Si $\alpha \subsetneq \beta$ sont deux ordinaux, alors $\alpha \in \beta$.

Proof.

Notons que α est un sous-ensemble de β fermé inférieurement pour l'ordre strict total $<$ (i.e. $\in$) : en effet, soit $x < y \in \alpha$, i.e. $x \in y \in \alpha$, alors $x \in \alpha$, car α est transitif.
Soit $\gamma := \min_{\in} \beta \setminus \alpha$. Mq $\gamma = \alpha$ par double inclusion. Soit $x \in \gamma$, i.e. $x < \gamma$, alors $x \notin \beta \setminus \alpha$. Or $x \in \gamma \in \beta$, donc $x \in \beta$, donc $x \in \alpha$. Ainsi $\gamma \subseteq \alpha$. Soit $x \in \alpha$. Si $\gamma \leq x$, alors $\gamma \in \alpha$, contradiction, donc $x < \gamma$. Ainsi $\alpha \subseteq \gamma$, donc $\alpha = \gamma \in \beta$.

□

Corollary

Soient α, β deux ordinaux.

- $\alpha \subsetneq \beta$ *ssi* $\alpha \in \beta$.
- $\alpha \subseteq \beta$ *ssi* $\alpha \leq \beta$.

Ordre total et ordinaux

Lemma

Si α et β sont des ordinaux, alors $\alpha \subseteq \beta$ ou $\beta \subseteq \alpha$.

Proof.

$\gamma := \alpha \cap \beta$ est un ordinal, car la transitivité et le bon ordre de $\in$ sont clos par intersection.
Si $\gamma \subsetneq \alpha, \beta$, alors $\gamma \in \alpha, \beta$ par le lemme précédent, donc $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$, contredisant le (bon) ordre de $\in$, par exemple dans α. □

Corollary

$<$, i.e. $\in$, est un "ordre total" sur la classe propre des ordinaux.

Proof.

Par le lemme précédent et le corollaire précédent. □

Minimum d'ordinaux

Lemma

Pour tout ensemble non vide E d'ordinaux, $\cap E$ est un ordinal, et le minimum de E (pour $\in$).

Proof.

Soit $\alpha \in E$.

- Cas $\alpha \cap E = \emptyset$, i.e $\alpha = \min E$. Pour tout $\beta \in E \setminus \{\alpha\}$, on a donc $\alpha \in \beta$, i.e. $\alpha \subseteq \beta$, Donc $\alpha = \cap E$.
- Cas $\alpha \cap E \neq \emptyset$. Soit $\beta := \min(\alpha \cap E)$, bien défini car $< |_\alpha$ est un bon ordre. Soit $\gamma \in \beta \cap E$. Alors $\gamma \in \beta \in \alpha$, contredisant la définition de β. Donc $\beta \cap E = \emptyset$ et on se ramène au cas ci-dessus.

$\square$

Corollary

$<$, i.e. $\in$, est un "bon ordre" sur la classe des ordinaux. (Cf bons ordres)

Ensemble transitifs d'ordinaux

Definition (Rappel)

Un ensemble est un nombre ordinal (ou juste ordinal) s'il est transitif et bien ordonné par l'appartenance $\in$. Dans ce contexte, on dénote $\in$ par $<$.

Lemma

Pour tout ensemble α, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. *α est un ordinal.*
2. *α est un ensemble transitif d'ordinaux.*

Proof.

$1 \Rightarrow 2$ a déjà été prouvé, soit donc E un ensemble ensemble transitif d'ordinaux. Soit $\emptyset \neq S \subseteq E$. Alors $\cap S = \min S$ (par un lemme précédent) montre que E est bien ordonné pour $\in$. $\square$

Borne supérieure d'ordinaux

Lemma

Pour tout ensemble non vide E d'ordinaux, $\cup E$ est un ordinal, et la borne supérieure de E (dans tout ordinal contenant $\cup E$).

Proof.

- $\cup E$ est un ordinal : c'est un ensemble d'ordinaux, il suffit de montrer sa transitivité. Soit $\alpha \in \cup E$. Mq $\alpha \subseteq \cup E$. Soit donc $\beta \in E$ tel que $\alpha \in \beta$. Alors $\alpha \subseteq \beta \subseteq \cup E$ par définition de l'union.
- $\cup E$ est un majorant de E : soit $\beta \in E$, donc $\beta \subseteq \cup E$, donc $\beta \leq \cup E$.
- Soit β un ordinal majorant E, i.e. pour tout $\alpha \in E$, on a $\alpha \leq \beta$, i.e. $\alpha \subseteq \beta$. Donc $\cup E \subseteq \beta$, i.e. $\cup E \leq \beta$. Ainsi $\cup E = \sup E$.

$\square$

Successeur d'un ordinal

Lemma

Si α est un ordinal, alors $\alpha \cup \{\alpha\}$ aussi (et $\alpha < \alpha \cup \{\alpha\}$). De plus, pour tout ordinal $\beta > \alpha$, on a $\beta \geq \alpha \cup \{\alpha\}$.

Proof.

- $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ensemble d'ordinaux.
- Transitivité : soit $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$.
  - Si $x \in \alpha$, alors $x \subseteq \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$, car α est transitif.
  - Si $x \in \{\alpha\}$, alors $x = \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$.
- Par contraposée, pour tout $\beta < \alpha \cup \{\alpha\}$, on a $\beta \in \alpha$ ou $\beta = \alpha$.

□

Pour tout ordinal α, on note $succ(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$ le successeur de α.

Ordinal successeur, ordinal limite

- Un ordinal α est dit ordinal successeur, s'il existe un ordinal β tel que $\alpha = succ(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$.
- Un ordinal qui n'est pas successeur est appelé ordinal limite.

Lemma

Pour tout ordinal limite α, on a $\alpha = \cup\alpha = \sup \alpha$.

Proof.

- $\cup\alpha \subseteq \alpha$, car tout ordinal est transitif, et tout ensemble transitif vérifie cette propriété.
- Soit $\beta \in \alpha$, alors $succ(\beta) \neq \alpha$ car α est un ordinal limite, donc $succ(\beta) \in \alpha$, donc $succ(\beta) \subseteq \cup\alpha$ par définition de l'union. Or $\beta \in succ(\beta)$, donc $\beta \in \cup\alpha$.

□

En particulier, $\sup 0 = \cup\emptyset = \emptyset = 0$.
Ce n'est pas une convention, mais une propriété.

Divers

Lemma

1. $\cup(succ(\alpha)) = \alpha$
2. *Un ordinal* α *est limite ssi succ*$(\beta) < \alpha$ *pour tout* $\beta < \alpha$.
3. *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *(aussi noté* ω*) est le plus petit ordinal limite non nul.*
4. *Les éléments de* $\mathbb{N}$ *sont les ordinaux finis, aussi appelés les entiers naturels.*

L'ensemble des ordinaux

n'existe pas (Cf paradoxe de Burali-Forti)

Theorem

La collection des ordinaux n'est pas un ensemble.

Proof.

Vers une contradiction soit E l'ensemble des ordinaux. Alors $\alpha := succ(\sup E) = \cup E \cup \{\cup E\}$ est un ordinal. Pour tout $\beta \in E$ on a $\beta \subseteq \cup E$, donc $\beta < \alpha$, donc $\alpha \notin E$, contradiction. $\square$

Preuve alternative.

Vers une contradiction soit E l'ensemble des ordinaux. Mq que E est transitif : soit $\alpha \in E$, alors les éléments de α sont des ordinaux, donc sont aussi éléments de E. Ainsi $\alpha \subseteq E$. Comme E est transitif, c'est un ordinal, donc $E \in E$, donc $\in$ n'est pas un bon ordre sur E, contradiction. $\square$

Axiomes de Zermelo-Fraenkel et axiome du choix (VII)

ZF + AC = ZFC

Schéma d'axiome de remplacement : pour toute formule $\phi(x, y, p)$, on admet l'axiome $\forall p$,

$$\begin{gathered}\forall x, y, z((\phi(x, y, p) \wedge \phi(x, z, p)) \Rightarrow y = z) \\ \Downarrow \\ \forall A \exists B \forall y (y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A \phi)\end{gathered}$$

Theorem

Le schéma d'axiome de remplacement implique une généralisation avec tuple de paramètres. (Comme pour la séparation.)

Theorem

Le schéma d'axiome de remplacement implique le schéma d'axiome de séparation.

Schémax d'axiome : remplacement et séparation

ZF + AC = ZFC

Remplacement : pour toute $\phi(x, y, p)$, on admet $\forall p$,

$$\forall x, y, z((\phi(x, y, p) \wedge \phi(x, z, p)) \Rightarrow y = z)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall A \exists B \forall y (y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A \phi)$$

Theorem

Le schéma d'axiome de remplacement implique le schéma d'axiome de séparation.

Proof.

Soit $\phi(x, p)$ une formule. Soit p, A deux ensembles. On veut montrer l'existence d'un B tel que $x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge \phi)$ pour tout x. Soit $\psi(x, y, p) := x = y \wedge \phi(x, p)$. On a $\psi(x, y, p) \wedge \psi(x, z, p) \Rightarrow y = z$, donc par remplacement, soit B tel que $\forall y (y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A (x = y \wedge \phi(x, p)))$. Plus simplement $\forall y (y \in B \Leftrightarrow (y \in A \wedge \phi(y, p)))$. Ce B est notre témoin. (Par $\phi(y, p)$ on entend $\phi[x \leftarrow y]$.) $\square$

Les ordinaux représentent les bons ordres

Theorem

Tout bon ordre est isomorphe à un unique ordinal.

Preuve (début).

Soit $(E, <_E)$ un bon ordre. Sur ce transparent on trouve un candidat B et on montre que c'est un ordinal ; sur le prochain transparent on montre que B est isomorphe à E.

Soit $\phi(x, \alpha, E)$ une formule décrivant que $x \in E$ et que le segment initial $E(x)$ est isomorphe à l'ordinal α. (Tout est exprimable dans notre langage.) On a $\phi(x, \alpha, E) \wedge \phi(x, \beta, E) \Rightarrow \alpha = \beta$, car deux ordinaux isomorphes sont égaux. Par axiome de remplacement, $\forall A \exists B \forall y (y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A \phi)$. En prenant $A := E$, on obtient l'existence d'un B tel que $\forall \alpha (\alpha \in B \Leftrightarrow \exists x \in E \phi(x, \alpha, E))$, i.e. B est l'ensemble des ordinaux α isomorphes à un $E(x)$. Alors B est un ordinal, car B est transitif : si $\alpha \in B$, tout $\gamma \in \alpha$ est aussi isomorphe à un $E(x)$, donc $\gamma \in B$. $\square$

Les ordinaux représentent les bons ordres (II)

Theorem

Tout bon ordre est isomorphe à un unique ordinal.

Preuve (fin).

Sur ce transparent, on montre que l'ordinal B, l'ensemble des ordinaux isomorphes à un $E(x)$, est isomorphe à E.

On utilise la trichotomie comparant deux bons ordres.

- Tout segment initial de B est un élément de B, donc est isomorphe à un segment initial de E, donc n'est pas isomorphe à E.
- Si B est isomorphe à un $E(x)$, alors $B \in B$, contradiction.
- Donc B est isomorphe à E.

$\square$

Récurrence transfinie sur les ordinaux

Theorem

Soit $\phi(x)$ une formule telle que pour tout ordinal α, $\forall \beta < \alpha, \phi(\beta)$ implique $\phi(\alpha)$. Alors $\phi(\alpha)$ pour tout ordinal α.

Proof.

Vers une contradiction, soit α tel que $\phi(\alpha)$ ne soit pas vraie. Soit $\beta := \min\{\gamma \leq \alpha \mid \neg\phi(\gamma)\}$. Par définition de β on a $\forall \gamma < \beta, \phi(\gamma)$. Par l'implication de l'hypothèse, on a donc $\phi(\beta)$, contradiction. Ainsi, $\phi(\alpha)$ pour tout ordinal α. □

Voici une version formelle du théorème précédent :

$$\forall \alpha, (\mathit{Ord}(\alpha) \wedge (\forall \beta \in \alpha, \phi(\beta)) \Rightarrow \phi(\alpha)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \alpha, \mathit{Ord}(\alpha) \Rightarrow \phi(\alpha)$$

Récurrence transfinie sur les ordinaux (II)

Ci-dessous, une variante en général plus pratique du théorème précédent.

Theorem

Soit $\phi(\alpha)$ une formule telle que les trois assertions suivantes soient vraies.

1. $\phi(0)$, *i.e.* $\phi(\emptyset)$, *est vraie,*
2. *pour tout ordinal α tel que $\phi(\alpha)$, on a $\phi(succ(\alpha))$, i.e. $\phi(\alpha \cup \{\alpha\})$,*
3. *Pour tout ordinal limite non nul α, si $\forall \beta < \alpha(\phi(\beta))$ alors $\phi(\alpha)$.*

Alors $\phi(\alpha)$ est vraie pour tout ordinal α.

Proof.

Sinon, soit α tel que $\phi(\alpha)$ ne soit pas vraie. Soit $\beta := \min\{\gamma \leq \alpha \mid \neg\phi(\gamma)\}$. Par 1,2,3, β ne peut être ni 0, ni un ordinal successeur, ni un ordinal limite non nul, contradiction. □

Suites transfinies

- Une fonction de domaine $\mathbb{N}$ peut-être appelée suite infinie et notée $\langle a_n : n < \omega \rangle$.
- Une fonction de domaine $n = \{0, \ldots, n-1\} \in \mathbb{N}$ peut-être appelée suite finie et notée $\langle a_i : i < n \rangle$.
- Une fonction de domaine un ordinal α peut-être appelée suite transfinie ou α-suite et notée $\langle a_\beta : \beta < \alpha \rangle$. Sa longueur est α.
- Si les a_β sont dans E, la suite est dite à valeurs dans E.
- Si une suite s est de longueur α, alors $s\hat{}x$ et sx dénotent $s \cup (\alpha, x)$, suite de longueur $succ(\alpha)$.

Récursion transfinie sur les ordinaux

ou définition par récurrence/induction transfinie

Les deux théorèmes précédents disent comment prouver qu'une formule est vraie pour tous les ordinaux. Le théorème suivant dit comment définir par récurrence une fonction dont l'ensemble de départ est un ordinal.

Theorem

Pour tout ordinal α, ensemble A et $g : (\cup_{\beta<\alpha} A^{\beta}) \to A$, il existe une unique fonction $f : \alpha \to A$ telle que $P(f, \alpha) := \forall \beta < \alpha (f(\beta) = g(f|_{\beta}))$.

Proof.

Unicité : soit $f, f' : \alpha \to A$ telles que $P(f, \alpha)$ et $P(f', \alpha)$. Si $f \neq f'$, soit $\beta < \alpha$ minimal tel que $f(\beta) \neq f'(\beta)$; alors $f|_{\beta} = f'|_{\beta}$, donc $f(\beta) = g(f|_{\beta}) = g(f'|_{\beta}) = f'(\beta)$, contradiction.

□

Récursion transfinie (II)

Theorem

Pour tout ordinal α, ensemble A et $g : (\cup_{\beta<\alpha} A^\beta) \to A$, il existe une unique fonction $f : \alpha \to A$ telle que $P(f, \alpha) := \forall \beta < \alpha, f(\beta) = g(f|_\beta)$.

Proof.

Existence : soit $Q(\gamma) := (\exists f : \gamma \to A) P(f, \gamma)$. On montre par récurrence transfinie sur γ que $(\forall \gamma \leq \alpha) Q(\gamma)$.

- Cas de base, $\gamma = 0$. Avec $f : \emptyset \to A$, on a bien $P(f, \emptyset)$. Donc $Q(\gamma)$.
- Si $\gamma = succ(\delta)$, alors soit $f : \delta \to A$ telle que $P(f, \delta)$. On étend f par $f'(\delta) := g(f)$ et, par disjonction de cas, on obtient $P(f', succ(\delta))$. En effet, soit $\beta < succ(\delta)$. Si $\beta < \delta$ alors $f'(\beta) = f(\beta) = g(f|_\beta) = g(f'|_\beta)$, et si $\beta = \delta$ alors $f'(\beta) = g(f) = g(f'|_\beta)$.

$\square$

Récursion transfinie (III)

Theorem

Pour tout ordinal α, ensemble A et $g : (\cup_{\beta<\alpha} A^\beta) \to A$, il existe une unique fonction $f : \alpha \to A$ telle que $P(f, \alpha) := \forall \beta < \alpha, f(\beta) = g(f|_\beta)$.

Proof.

Existence : soit $Q(\gamma) := \exists f : \gamma \to A, P(f, \gamma)$. On montre par récurrence transfinie sur γ que $\forall \gamma \leq \alpha, Q(\gamma)$.

Cas où γ est un ordinal limite. Pour tout $\delta < \gamma$, soit $f_\delta : \delta \to A$ tel que $P(f_\delta, \delta)$. Alors pour tout $\delta < \delta' < \gamma$ on a $\forall \beta < \delta', f_{\delta'}(\beta) = g(f_{\delta'}|_\beta)$, donc $\forall \beta < \delta, f_{\delta'}|_\delta(\beta) = g((f_{\delta'}|_\delta)|_\beta)$, i.e. $P(f_{\delta'}|_\delta, \delta)$. Par unicité, $f_{\delta'}|_\delta = f_\delta$. Donc la relation $f := \cup_{\delta<\gamma} f_\delta$ est une fonction $\gamma \to A$. Mq $P(f, \gamma)$: pour tout $\beta < \gamma$, on a $succ(\beta) < \gamma$ et
$f(\beta) = f_{succ(\beta)}(\beta) = g(f_{succ(\beta)}|_\beta) = g(f|_\beta)$. □

Récursion transfinie sur les ordinaux (IV)

Ci-dessous, une variante en général plus pratique du théorème précédent.

Theorem

Pour tout ordinal α, ensemble A et $g_0 \in A$, $g_{succ} : A \to A$, $g_{lim} : (\cup_{\beta<\alpha} A^{\beta}) \to A$, il existe une unique fonction $f : \alpha \to A$ telle que

- $f(0) = g_0$
- *Pour tout ordinal $\beta < \alpha$ tel que $succ(\beta) < \alpha$, on a $f(succ(\beta)) = g_{succ} \circ f(\beta)$.*
- *Pour tout ordinal limite $\beta < \alpha$, on a $f(\beta) = g_{lim}(f|_{\beta})$.*

Récursion transfinie (V)

Exemple

On définit la parité d'un ordinal.

1. $p(0) := 0$
2. $p(succ(\alpha)) := 1 - p(\alpha)$
3. Pour tout ordinal limite non nul α, $p(\alpha) := 0$.

Récursion avec propriété

Au cours de la définition récursive d'une fonction, on a parfois besoin/envie de maintenir une propriété. Le théorème précédent ne le permet pas, mais le suivant si, par le biais d'une restriction de domaine de g.

Theorem

Soit un ordinal α, un ensemble A et $g :\subseteq (\cup_{\beta<\alpha} A^{\beta}) \to A$ telle que

- $\emptyset = A^{\emptyset} \in dom(g)$.
- *Si* $f \in dom(g)$ *et* $dom(f\hat{}g(f)) < \alpha$, *alors* $f\hat{}g(f) \in dom(g)$.
- *Pour tout ordinal limite non nul* β *et* $f : \beta \to A$, *si* $\forall \gamma < \beta, f|\gamma \in dom(g)$ *alors* $f \in dom(g)$.

Alors il existe une unique fonction $f : \alpha \to A$ *telle que* $P(f, \alpha) := \forall \beta < \alpha, f|_{\beta} \in dom(g) \wedge f(\beta) = g(f|_{\beta})$.

Proof.

Unicité : soit $f, f' : \alpha \to A$ telles que $P(f, \alpha)$ et $P(f', \alpha)$. Si $f \neq f'$, soit $\beta < \alpha$ minimal tel que $f(\beta) \neq f'(\beta)$; alors $f|_{\beta} = f'|_{\beta}$, donc $f(\beta) = g(f|_{\beta}) = g(f'|_{\beta}) = f'(\beta)$, contradiction. □

Récursion avec propriété (II)

Theorem

Soit un ordinal α, un ensemble A, et $g :\subseteq (\cup_{\beta<\alpha} A^\beta) \to A$ telle que

1. *Si $f \in dom(g)$ et $dom(f\hat{\ }g(f)) < \alpha$, alors $f\hat{\ }g(f) \in dom(g)$.*
2. *Pour tout ordinal limite (non nul) β et $f : \beta \to A$, si $\forall \gamma < \beta, f|\gamma \in dom(g)$ alors $f \in dom(g)$.*

Alors $\exists! f : \alpha \to A$ t.q. $P(f,\alpha) := \forall \beta < \alpha, f|_\beta \in dom(g) \wedge f(\beta) = g(f|_\beta)$.

Existence : soit $Q(\gamma) := \exists f : \gamma \to A, P(f,\gamma)$. On montre par récurrence transfinie sur γ que $\forall \gamma \leq \alpha, Q(\gamma)$.
Cas de base, $\gamma = 0$. Avec $f : \emptyset \to A$, on a bien $P(f,\emptyset)$. Donc $Q(\gamma)$.

Récursion avec propriété (III)

Theorem

Soit un ordinal α, un ensemble A, et $g :\subseteq (\cup_{\beta<\alpha} A^{\beta}) \to A$ telle que

1. *Si $f \in dom(g)$ et $dom(f\hat{~}g(f)) < \alpha$, alors $f\hat{~}g(f) \in dom(g)$.*
2. *Pour tout ordinal limite (non nul) β et $f : \beta \to A$, si $\forall \gamma < \beta, f|\gamma \in dom(g)$ alors $f \in dom(g)$.*

Alors $\exists! f : \alpha \to A$ t.q. $P(f, \alpha) := \forall \beta < \alpha, f|_{\beta} \in dom(g) \wedge f(\beta) = g(f|_{\beta})$.

Existence : soit $Q(\gamma) := \exists f : \gamma \to A, P(f, \gamma)$. Mq $\forall \gamma \leq \alpha, Q(\gamma)$.

Si $\gamma = succ(\delta)$, alors (HR) soit $f : \delta \to A$ telle que $P(f, \delta)$. Donc $\forall \beta < \delta, f|_{\beta} \in dom(g)$. Si δ est limite, alors $f \in dom(g)$ par hyp 2. Si $\delta = succ(\delta')$, alors $f|_{\delta'}\hat{~}g(f|_{\delta'}) \in dom(g)$ par hyp 1. Or $f(\delta') = g(f|_{\delta'})$ par HR, donc $f \in dom(g)$. Soit $f' := f\hat{~}g(f)$, i.e. $f'(\delta) = g(f)$. Mq $P(f', \gamma)$. Soit $\beta < \gamma$. Si $\beta < \delta$, alors $f'|_{\beta} \in dom(g) \wedge f'(\beta) = g(f'|_{\beta})$ par HR et car $f \subseteq f'$. Si $\beta = \delta$, par construction et preuve $f'|_{\delta} = f \in dom(g)$ et $f'(\delta) = g(f'|_{\delta})$.

Récursion avec propriété (IV)

Theorem

Soit un ordinal α, un ensemble A, et $g :\subseteq (\cup_{\beta<\alpha} A^{\beta}) \to A$ telle que

1. *Si $f \in dom(g)$ et $dom(f\hat{}g(f)) < \alpha$, alors $f\hat{}g(f) \in dom(g)$.*
2. *Pour tout ordinal limite (non nul) β et $f : \beta \to A$, si $\forall \gamma < \beta, f|\gamma \in dom(g)$ alors $f \in dom(g)$.*

Alors $\exists ! f : \alpha \to A$ t.q. $P(f,\alpha) := \forall \beta < \alpha, f|_{\beta} \in dom(g) \wedge f(\beta) = g(f|_{\beta})$.

Existence : soit $Q(\gamma) := \exists f : \gamma \to A, P(f,\gamma)$. Mq $\forall \gamma \leq \alpha, Q(\gamma)$.

Cas où γ est un ordinal limite. Pour tout $\delta < \gamma$, soit $f_{\delta} : \delta \to A$ tel que $P(f_{\delta}, \delta)$. Alors pour $\delta < \delta' < \gamma$ et $\beta < \delta'$ on a $f_{\delta'}|_{\beta} \in dom(g)$ et $f_{\delta'}(\beta) = g(f_{\delta'}|_{\beta})$, donc pour $\beta < \delta$ on a $(f_{\delta'}|_{\delta})|_{\beta} \in dom(g)$ et $f_{\delta'}|_{\delta}(\beta) = g((f_{\delta'}|_{\delta})|_{\beta})$, i.e. $P(f_{\delta'}|_{\delta}, \delta)$. Par unicité, $f_{\delta'}|_{\delta} = f_{\delta}$. Donc la relation $f := \cup_{\delta<\gamma} f_{\delta}$ est une fonction $\gamma \to A$. Mq $P(f,\gamma)$: pour tout $\beta < \gamma$, on a $succ(\beta) < \gamma$ et $f|_{\beta} = f_{succ(\beta)}|_{\beta} \in dom(g)$ et $f(\beta) = f_{succ(\beta)}(\beta) = g(f_{succ(\beta)}|_{\beta}) = g(f|_{\beta})$.

Encore de bons ordres et leurs segments initiaux

Lemma

Soient $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ *deux bons ordres,* $A' \subseteq A$ *et* $B' \subseteq B$ *tels que*

- *pour tout* $x \in A'$ *il existe* $y \in B'$ *tel que* $A(x) \approx B(y)$,
- A' *est co-final dans* A, *i.e.* $\forall x \in A \exists x' \in A' (x \leq_A x')$.

Alors A *est isomorphe, soit à* B *soit à un segment initial de* B.

Proof.

En TD.

$\square$

Ensemble d'ordinaux isomorphe à un ordinal

Lemma

Soient α un ordinal et $E \subseteq \alpha$ un ensemble. Alors $(E, \in)$ est isomorphe à un ordinal inférieur ou égal à α.

Proof.

Par un résultat similaire sur les bons ordres, plus précisément : Soit $(B, <)$ un bon ordre et $E \subseteq B$. Alors $(E, < |_E)$ est isomorphe à un sous-ensemble fermé inférieurement de B.

$\square$

Fonctions strictement croissantes entre ordinaux

Lemma

Soient deux ordinaux α, β tels qu'il existe un fonction strictement croissante de α dans β. Alors $\alpha \leq \beta$.

Proof.

Soit $f : \alpha \to \beta$ strictement croissante. Alors $f[\alpha] \subseteq \beta$ et $f : \alpha \xrightarrow{\sim} f[\alpha]$. Par un résultat précédent, $f[\alpha]$ est isomorphe soit à β, soit un segment initial de β. De même pour α. $\square$

Addition de deux ordinaux

- Additionner deux ordinaux consiste à "empiler" le 2ème sur le 1er.
- En fait, on empile des copies des ordinaux.
- Soit α, β deux ordinaux. Soit $(\{0\} \times \alpha, <_0)$ le bon ordre tel que $(0, \alpha') <_0 (0, \alpha'')$ ssi $\alpha' < \alpha'' < \alpha$. De même $(\{1\} \times \beta, <_1)$.

Lemma

1. $\{0\} \times \alpha$ *et* $\{1\} \times \beta$ *sont disjoints.*
2. $<_0 \cup <_1 \cup \big((\{0\} \times \alpha) \times (\{1\} \times \beta)\big)$ *est un bon ordre (sur l'ensemble* $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$*).*

On dénote par $\alpha + \beta$ l'unique ordinal isomorphe à $<_0 \cup <_1 \cup (\{0\} \times \alpha) \times (\{1\} \times \beta)$

Premières propriétés de l'addition

Lemma

1. *L'addition est associative.*
2. 0 *est l'unique élément neutre (gauche et droite).*
3. $\alpha + 1 = \mathit{succ}(\alpha)$
4. *L'addition n'est pas commutative.*
5. *Si* $\beta \neq 0$, *alors* $\alpha + \beta$ *est un ordinal limite ssi* β *l'est.*

Addition et inégalité

On note que l'addition ordinale restreinte aux ordinaux finis correspond à l'addition usuelle sur les entiers.

Lemma

Pour des ordinaux α, β, γ, si $\beta < \gamma$ alors

1. $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$
2. $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$

Proof.

1. L'identité est srictement croissante de l'empilement de β sur α vers (un segment initial de) l'empilement de γ sur α.
2. On définit f strictement croissante en envoyant β vers un segment initial de γ, et α vers α. Comme $f[\beta + \alpha] \subseteq \gamma + \alpha$, d'après un résultat précédent $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$.

$\square$

Soustraction d'ordinaux

Pour des ordinaux $\alpha \leq \gamma$, l'ensemble $\gamma \setminus \alpha$ est bien ordonné par $\in$. On dénote par $\gamma - \alpha$ l'unique ordinal isomorphe à $(\gamma \setminus \alpha, \in)$.

Lemma

Pour des ordinaux α, β, on a

1. $\alpha - 0 = \alpha$
2. $\alpha - \alpha = 0$
3. $(\alpha + \beta) - \alpha = \beta$

Proof.

Pour 3 : à isomorphisme près, quand on enlève le segment initial α à l'empilement $\alpha + \beta$, il reste β. □

En revanche, parfois $(\alpha + \beta) - \beta \neq \alpha$. Par exemple $(1 + \omega) - \omega = 0$ et $(\omega + 1) - 1 = \omega + 1$.

Corollary

Si $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, alors $\beta = \gamma$.

Soustraction d'ordinaux (II)

Rappel: $(\alpha + \beta) - \alpha = \beta$

Lemma

Pour des ordinaux $\alpha \leq \beta$*, on a* $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$

Proof.

À isomorphisme près, quand on enlève le segment initial α à β et qu'on empile le résultat sur α, on obtient, le β d'origine. $\square$

Lemma

$(\alpha + \beta) - \beta = \alpha$ *ssi* $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

Proof.

En TD. $\square$

Addition et limite

Lemma

Pour tout ordinal limite non nul β, on a $\alpha + \beta = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma)$.

Proof.

Par double inégalité.

- $\forall \gamma < \beta(\alpha + \gamma < \alpha + \beta)$, donc $\sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma) \leq \alpha + \beta$.
- Pour $\alpha \leq \delta < \alpha + \beta$ soit $\gamma := \delta - \alpha$. Alors $\alpha + \gamma = \delta < \alpha + \beta$, donc $\gamma < \beta$. Donc $\sup_{\delta<\alpha+\beta} \delta \leq \sup_{\gamma<\beta} \alpha + \gamma$. Or $\alpha + \beta$ est limite, car β l'est, donc $\alpha + \beta = \sup_{\delta<\alpha+\beta} \delta$. Ainsi, $\alpha + \beta \leq \sup_{\gamma<\beta} \alpha + \gamma$.

$\square$

Caractérisation de l'addition

Soit un ordinal α. Les transparents précédents montrent que

- $\alpha + 0 = \alpha$
- Pour tout ordinal β, on a $\alpha + \mathit{succ}(\beta) = \mathit{succ}(\alpha + \beta)$ (cf associativité)
- Pour tout ordinal limite non nul β, on a $\alpha + \beta = \sup_{\gamma < \beta} \alpha + \gamma$. (cf transparent précédent)

On aurait pu invoquer le théorème de récursion transfinie pour définir l'addition, qui est caractérisée par les trois propriétés ci-dessus.

L'addition se définirait donc par récurrence sur le deuxième argument.

Multiplication de deux ordinaux

Multiplier deux ordinaux consiste à remplacer chaque élément du deuxième par une copie du premier, comme un zoom.

Lemma

Soient α, β deux ordinaux. $(\alpha \times \beta, <_{li})$ est défini par le produit lexicographique inverse, i.e. de droite à gauche : $(x, y) <_{li} (z, t)$ si $y < t$ ou $(y = t$ et $x < z)$. C'est un bon ordre.

On dénote par $\alpha \cdot \beta$ ou $\alpha\beta$ l'unique ordinal isomorphe à $(\alpha \times \beta, <_{li})$.

Lemma

1. *La multiplication est associative.*
2. $1 = \{0\}$ *est l'élément neutre,* 0 *est élément absorbant.*
3. $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$.
4. *La multiplication n'est pas commutative.* $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$.
5. $\alpha\beta$*, c'est "*β *fois* α*", pas le contraire.*
6. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. *Mais* $(\omega + 1)2 = \omega + 1 + \omega + 1 = \omega + \omega + 1 = \omega 2 + 1 \neq \omega 2 + 2$.

Première propriétés de la multiplication

On note que la multiplication ordinale restreinte aux ordinaux finis correspond à la multiplication usuelle sur les entiers.

Lemma

Soient des ordinaux α, β, γ tels que $\alpha \neq 0$ et $\beta < \gamma$.

1. $\alpha\beta < \alpha\gamma$
2. $\beta\alpha \leq \gamma\alpha$.

Proof.

1. $\alpha\gamma = \alpha(\beta + (\gamma - \beta)) = \alpha\beta + \alpha(\gamma - \beta) > \alpha\beta$
2. Soit f une fonction strictement croissante de β dans γ, par exemple l'identité de β. On définit une fonction strictement croissante g de $\beta\alpha$ dans $\gamma\alpha$ en envoyant via f chaque copie de β vers la copie correspondante de γ. Alors $\beta\alpha \approx g[\beta\alpha] \subseteq \gamma\alpha$ implique $\beta\alpha \leq \gamma\alpha$.

$\square$

Caractérisation de la multiplication

Soit un ordinal α. Les transparents précédents montrent les deux premières propriétés ci-dessous, la troisième étant aussi vraie.

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- Pour tout ordinal β, on a $\alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha$.
- Pour tout ordinal limite non nul β, on a $\alpha \cdot \beta = \sup_{\gamma < \beta} \alpha \cdot \gamma$.

Comme pour l'addition, on aurait pu invoquer le théorème de récursion transfinie pour définir la multiplication, qui est caractérisée par les trois propriétés ci-dessus.

La multiplication se définirait donc par récurrence sur le deuxième argument.

Exponentiation d'ordinaux

Pour tout ordinal α, on définit α^β par récurrence sur β.

- $\alpha^0 := 1$
- Pour tout ordinal β on pose $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$
- Pour tout ordinal limite non nul β, on pose $\alpha^\beta := \sup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$.

Attention, notations ambigües.

- $2^\omega = sup_{n<\omega} 2^n = \omega$.
- Dans ce contexte, α^β n'est pas l'ensemble des fonctions de β dans α.