Complexité - TD 4

Benjamin Bordais
bordais@lsv.fr
www.lsv.fr/~bordais/

9 Décembre 2021

On rappel la définition de la classe de complexité PSPACE : un langage (ou problème de décision) est dans PSPACE s'il existe une machine de Turing M déterministe décidant le langage L qui termine sur toute entrée et telle qu'il existe un polynôme p tel que l'espacé pris par la machine M sur toute en entrée x de taille n prend un espace au plus $p(n)$ (en particulier, le temps pris peut être exponentiel en n).

Question 1 (Mon tout premier problème PSPACE-complet) *Montrer que le problème suivant est PSPACE-complet :*

— *Entrée : le code d'une machine de Turing M, un mot w, une quantité d'espace t écris en unaire*
— *Sortie : M accepte w en espace t*

Un problème PSPACE-complet classique est le suivant, appelée QBF (pour *quantified boolean formula*) :

Entrée : une formule bouléenne quantifié $\Phi = Q_1 x_1, \dots, Q_n x_n : \varphi(x_1, \dots, x_n)$ avec φ une formule de la logique propositionnelle sans variable libre et Q_i un quantificateur $\forall$ ou $\exists$.

Sortie : oui si et seulement si la formule est satisfiable (avec interprétation des quantificateurs avec la sémantique habituelle)

Question 2 *Qu'est ce que l'on obtient si tous les quantificateurs sont existentiels ? Et s'ils sont tous universels ?*

Jeu et complexité

Question 3 *Un jeu (à deux joueurs) à tour est un graphe orienté $G = (V, E)$ où l'ensemble des sommets $V = V_A \uplus V_B$ est partitionné en sommets appartenant au joueur A (i.e. V_A) et les sommets appartenant au joueur B (i.e. V_B) avec un sommet distingué $v_0 \in V$ qui correspond au sommet initial. Le graphe est tel que chaque sommet a un successeur, c'est-à-dire $\mathsf{Succ}(v) = \{v' \in V \mid (v, v') \in E\} \neq \emptyset$ pour tout $v \in V$. Une partie correspond alors à un chemin fini ou infini $\rho = v_0 \cdot v_1 \cdots \in V^* \cup V^\omega$ avec v_0 le sommet initial. Si la partie en est au sommet $v_i \in V_A$ alors c'est au joueur A de choisir le prochain sommet $v_{i+1} \in \mathsf{Succ}(v_i)$, tandis que c'est au joueur B si $v_i \in V_B$. Une condition de victoire détermine alors lorsqu'une partie infinis est gagnés par le joueur A (on considère des jeux perd/gagne, ainsi si le joueur A ne gagne pas, alors c'est le joueur B qui gagne). Un joueur $C \in \{A, B\}$ a une stratégie gagnante (ou gagne) à partir d'un sommet $v \in V$ s'il peut choisir le prochain sommet à partir de n'importe quelle partie se terminant en V_C tel que chaque partie infinie cohérente avec ces choix est gagnée par le joueur C.*

1. *Supposons que la condition de victoire soit une condition d'atteignabilité : étant donné un ensemble cible $T \subseteq V$, le joueur A gagne si et seulement si un sommet de T est vu. Montrer que décider le vainqueur d'un jeu d'atteignabilité à partir du sommet $v_0 \in V$ peut se faire en temps polynomial.*

   Indice : construire inductivement l'ensemble des sommets à partir desquels le joueur A peut forcer à se rapprocher de la cible T (c'est ce que l'on appelle l'attracteur de T).

2. *Considérons un $k \in \mathbb{N}$. Une condition d'atteignabilité k-généralisé est définie comme suit : étant donné k ensembles cibles $T_1, \ldots, T_k \subseteq V$, le joueur A gagne si et seulement si, pour tout $1 \leq i \leq k$, un sommet de T_i est vu. Montrer que décider le vainqueur d'un jeu d'attignabilité k-generalisé à partir du sommet $v_0 \in V$ peut être fait en temps polynomial.*

3. *Une condition d'atteignabilité généralisé est définit comme suit : étant donné plusieurs ensembles cibles $T_1, \ldots, T_k \subseteq V$, le joueur A gagne si et seulement si, pour tout $1 \leq i \leq k$, un sommet de T_i est vu. La différence avec l'objectif d'atteignabilité k-generalisé est que le nombre de cibles n'est pas borné a priori. Montrer que décider le vainqueur d'un jeu d'atteignabilité généralisé est* PSPACE*-complet.*

   Indice : pour l'appartenance à PSPACE, on pourra utiliser que si le joueur A peut gagner avec k cibles, il peut voir toutes les cibles en au plus $k \cdot n$ étapes avec $n := |V|$.

4. *Montrer que décider le vainqueur d'un jeu d'atteignabilité généralisé lorsque $V_B = \emptyset$ (i.e. le joueur A joue tout seul) est* NP*-complet.*