

# Complexité - TD 3.2

Benjamin Bordais  
bordais@lsv.fr  
www.lsv.fr/~bordais/

2 Décembre 2021

On rappelle la définition du problème de décision **SAT** :

- **ENTRÉE** : une formule propositionnelle  $\phi$  sous forme normale conjonctive
- **SORTIE** :  $\phi$  est satisfiable

Ce problème est **NP-complet**. Le problème **3-SAT** est la restriction du problème **SAT** aux formules contenant au plus trois littéraux par clause. Il est aussi **NP-complet**.

**Question 1 (Échauffement)** Soit  $L \subseteq \Sigma^*$  un langage sur l'alphabet  $\Sigma$ . À quelles conditions  $L$  est **PTIME-dur** pour des réductions en temps polynomial ?

**Question 2 (Un simple problème NP-complet)** Montrer que le langage suivant est **NP-complet** :  $\{(M, x, 1^t) \mid M \text{ accepte sur } x \text{ en temps au plus } t\}$  avec  $M$  le code d'une machine de Turing non-déterministe.

## La classe **coNP**

Soit une classe  $\mathcal{C}$  de problèmes de décision. La classe **coC** correspond à l'ensemble des langages  $L$  tel que  $\bar{L} \in \mathcal{C}$  :  $\text{coC} = \{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$ .

**Question 3** Supposons que le langage  $L$  soit complet pour la classe  $\mathcal{C}$ . Exhiber un langage complet pour la classe **coC**.

**Question 4** Prouver que le problème de décision suivant est **coNP-complet** :

**Tautology** :

- **ENTRÉE** : un formule propositionnelle  $\phi$  sous forme normale disjonctive
- **SORTIE** : toute valuation  $\nu$  satisfait  $\phi$

**Question 5** Le problème **SAT** reste-t-il **NP-complet** si la formula est en forme normale disjonctive (au lieu de conjonctive) ? Et pour **Tautology** ? (si la formula est en forme normale conjonctive au lieu de disjonctive)

**Question 6** Un problème **coNP-complet** est-il (a priori) dans **NP** ?

## Variantes de **SAT**

La première réduction peut se faire à partir de **SAT**. La deuxième peut se faire à partir de **3-SAT**

**Question 7** Prouver que le problème de décision suivant est **NP-complet** :

**MONOTONE-SAT** :

- *ENTRÉE* : un formule propositionnelle  $\phi$  sous forme normale conjonctive tel que, dans chaque clause, soit tous les littéraux positivement, soit ils apparaissent tous négativement
- *SORTIE* : il existe une valuation satisfaisant  $\phi$

**Question 8** Prouver que le problème de décision suivant est NP-complet :

NAE – SAT (pour 'not-all-equal') :

- *ENTRÉE* : un formule propositionnelle  $\phi$  sous forme normale conjonctive
- *SORTIE* : il existe une valuation tel que, dans chaque clause de  $\phi$  avec au moins deux littéraux, il y a au moins un littéral satisfait et un littéral non-satisfait. Les clauses à un littéral ont seulement besoin d'être satisfait (une telle valuation nae-satisfait  $\varphi$ ).

**Question 9 ((Bonus))** Exhiber une réduction de SAT vers 3 – SAT.