

Complexité - TD 3.2

Benjamin Bordais
bordais@lsv.fr
www.lsv.fr/~bordais/

2 Décembre 2021

On rappelle la définition du problème de décision SAT :

- ENTRÉE : une formule propositionnelle ϕ sous forme normale conjonctive
- SORTIE : ϕ est satisfiable

Ce problème est NP-complet. Le problème 3 – SAT est la restriction du problème SAT aux formules contenant au plus trois littéraux par clause. Il est aussi NP-complet.

Question 1 (Échauffement) Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage sur l'alphabet Σ . À quelles conditions L est PTIME-dur pour des réductions en temps polynomial ?

Question 2 (Un simple problème NP-complet) Montrer que le langage suivant est NP-complet : $\{(M, x, 1^t) \mid M \text{ accepte sur } x \text{ en temps au plus } t\}$ avec M le code d'une machine de Turing non-déterministe.

La classe coNP

Soit une classe \mathcal{C} de problèmes de décision. La classe $\text{co}\mathcal{C}$ correspond à l'ensemble des langages L tel que $\bar{L} \in \mathcal{C}$: $\text{co}\mathcal{C} = \{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$.

Question 3 Supposons que le langage L soit complet pour la classe \mathcal{C} . Exhiber un langage complet pour la classe $\text{co}\mathcal{C}$.

Question 4 Prouver que le problème de décision suivant est coNP-complet :

Tautology :

- ENTRÉE : un formule propositionnelle ϕ sous forme normale disjonctive
- SORTIE : toute valuation ν satisfait ϕ

Question 5 Le problème SAT reste-t-il NP-complet si la formula est en forme normale disjonctive (au lieu de conjonctive) ? Et pour Tautology ? (si la formula est en forme normale conjonctive au lieu de disjonctive)

Question 6 Un problème coNP-complet est-il (a priori) dans NP ?

Variantes de SAT

La première réduction peut se faire à partir de SAT. La deuxième peut se faire à partir de 3 – SAT

Question 7 Prouver que le problème de décision suivant est NP-complet :

MONOTONE – SAT :

- *ENTRÉE* : un formule propositionnelle ϕ sous forme normale conjonctive tel que, dans chaque clause, soit tous les littéraux positivement, soit ils apparaissent tous négativement
- *SORTIE* : il existe une valuation satisfaisant ϕ

Question 8 Prouver que le problème de décision suivant est NP-complet :

NAE – SAT (pour 'not-all-equal') :

- *ENTRÉE* : un formule propositionnelle ϕ sous forme normale conjonctive
- *SORTIE* : il existe une valuation tel que, dans chaque clause de ϕ avec au moins deux littéraux, il y a au moins un littéral satisfait et un littéral non-satisfait. Les clauses à un littéral ont seulement besoin d'être satisfait (une telle valuation nae-satisfait φ).

Question 9 ((Bonus)) Exhiber une réduction de SAT vers 3 – SAT.