Complexité - TD 2.1

Benjamin Bordais
bordais@lsv.fr
www.lsv.fr/~bordais/

22 Novembre 2021

Les réductions considérées sont en espace logarithmique (sauf spécification contraire). On rappelle la définition du problème de décision SAT :

- ENTRÉE : une formule propositionnelle ϕ sous forme normale conjonctive
- SORTIE : ϕ est satisfiable

Ce problème est NP-complet.

On donne également la définition suivante d'une coloration d'un graphe. Une *k-coloration* d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \to \{0, \dots k-1\}$ telle que si $\{u, v\} \in E$ alors $c(u) \neq c(v)$. Le problème $3-\mathsf{COLORATION}$ est défini ainsi :

- ENTRÉE : un graphe non orienté G
- SORTIE : il existe une 3-coloration de G

Ce problème est NP-complet.

Problème NP-complet sur les graphes

Prouver que les problèmes suivant sont NP-complet.

Question 1 (Ensemble indépendant) *Un* ensemble indépendant *dans un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets dont aucun n'est relié à aucun autre par une arête de G, c'est-à-dire tel que $u, v \in C$ implique $\{u, v\} \notin E$. Démontrer que le langage* $\mathsf{INDEPENDENT-SET}$ *défini comme suit est* NP*-complet.*
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$;
SORTIE : G a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins m

Question 2 (Recouvrement) *Un* recouvrement *C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets tel que toute arête de E est incidente à C, c'est-à-dire à au moins un élément de C. Démontrer que le langage* $\mathsf{NODE-COVER}$ *défini comme suit est* NP*-complet.*
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$;
SORTIE : G a un recouvrement de cardinal au plus m

Question 3 (Clique) *Une* clique *C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ induisant un sous-graphe complet de G, c'est-à-dire tel que pour tous $u, v \in C$ avec $u \neq v$, on a $\{u, v\} \in E$. Montrer que le problème* CLIQUE *défini comme suit est* NP*-complet.*
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$;
SORTIE : G a une clique de cardinal au moins m

Question 4 (Homomorphisme de graphe) *Un homomorphisme d'un graphe* $G = (V, E)$ *à un graphe* $G' = (V', E')$ *est une fonction* $h : V \to V'$ *telle que pour tout* $\{v_1, v_2\} \in E$, *on a* $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$. *Montrer que le problème* $\mathsf{GRAPH-HOMOMORPHISM}$ *défini ci-après est* NP*-complet.*
ENTRÉE : deux graphes non orientés, G_1 *et* G_2 *;*
SORTIE : il existe un homomorphisme de G_1 *à* G_2

Question 5 (Isomorphisme de graphe) *Deux graphes* $G = (V, E)$ *et* $G' = (V', E')$ *sont isomorphes si* $|V| = |V'|$ *et* $|E| = |E'|$ *et il existe une fonction bijective* $h : V \to V'$ *telle que* $\{v_1, v_2\} \in E$, *si et seulement si* $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$. *Montrer que le problème* $\mathsf{GRAPH-ISOMORPHISM}$ *défini ci-après est* NP*-complet.*
ENTRÉE : Deux graphes G *et* H.
QUESTION : G *contient un sous-graphe isomorphe à* H

Question 6 (Bonus : 3-coloration) *Prouver que le problème* $3-\mathsf{COLORATION}$ *est* NP*-complet. Pour prouver la* NP*-dureté de ce problème, on pourra effectuer une réduction depuis le problème 3-*SAT*, également* NP*-complet, qui une restriction de* SAT *aux formules avec au plus trois literaux par clause.*