Complexité - TD 1.2

Benjamin Bordais
bordais@lsv.fr
`www.lsv.fr/~bordais/`

18 Novembre 2021

On donne ici quelques définitions de classes de complexité usuelles :

- $\mathsf{L} = \mathsf{SPACE}(\log n)$: est la classe des langages décidés par des machines de Turing déterministes utilisant un espace logarithmique ;
- $\mathsf{NL} = \mathsf{NSPACE}(\log n)$: est la classe des langages décidés par des machines de Turing non-déterministes utilisant un espace logarithmique ;
- $\mathsf{P} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \mathsf{TIME}(n^k) = \mathsf{TIME}(n^{O(1)})$: est la classe des langages décidés par des machines de Turing déterministes en temps polynomial ;
- $\mathsf{NP} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \mathsf{NTIME}(n^k) = \mathsf{NTIME}(n^{O(1)})$: est la classe des langages décidés par des machines de Turing non-déterministes en temps polynomial.

On a les inclusions suivantes :

$$\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} \subseteq \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$$

Non Déterminisme

Pour chacun des problèmes de décisions suivants, donner un algorithme qui optimise le temps et/ou l'espace utilisé (dans le pire cas, asymptotiquement) en explicitant s'il y a un intérêt à utiliser du non-déterminisme. En particulier, donner à quelles classes de complexité présentées plus haut appartiennent ces problème de décision.

Question 1

- ***Entrée*** *: une liste (non vide) l d'entiers (naturels), un entier n*
- ***Sortie*** *: oui ssi n est le minimum de la liste l*

Question 2

- ***Entrée*** *: une liste (non vide) l d'entiers (naturels)*
- ***Sortie*** *: oui ssi l contient un nombre qui n'est pas premier*

Question 3

- ***Entrée*** *: un graphe $G = (V, E)$ orienté, pondéré (poids entiers strictement positifs), deux sommets s, t, un entier k*
- ***Sortie*** *: oui ssi k est le poids d'un plus court chemin de s vers t*

Question 4

- ***Entrée*** *: un graphe $G = (V, E)$ orienté, deux sommets s, t*
- ***Sortie*** *: oui ssi il existe un chemin de s vers t*

Question 5

- ***Entrée*** *: un graphe $G = (V, E)$ orienté, deux sommets s, t*

— ***Sortie*** *: oui ssi il n'existe pas de chemin de s vers t*

Question 6

— ***Entrée*** *: un ensemble d'entiers $S = \{n_1, \ldots, n_k\}$, en entier n*

— ***Sortie*** *: oui ssi il existe un sous-ensemble non-vide $T \subseteq S$ tel que $\Sigma_{x \in T} x = n$*

Question 7 — ***Entrée*** *: un ensemble d'entiers $S = \{2^{n_1}, \ldots, 2^{n_k}\}$, en entier 2^n*

— ***Sortie*** *: oui ssi il existe un sous-ensemble non-vide $T \subseteq S$ tel que $\Sigma_{x \in T} \log x = n$*

Question 8

— ***Entrée*** *: un formule de la logique propositionelle φ ;*

— ***Sortie*** *: oui ssi cette formule φ est satisfiable*

Question 9

— ***Entrée*** *: un formule de la logique propositionelle φ ;*

— ***Sortie*** *: oui ssi cette formule φ est une tautologie*

Question 10 (*)

— ***Entrée*** *: un formule de la logique propositionelle φ ;*

— ***Sortie*** *: oui ssi cette formule φ admet une unique valuation la satisfaisant*

Question 11 *On fixe un $k \in \mathbb{N}$.*

— ***Entrée*** *: un formule de la logique propositionelle φ en CNF à au plus k variables ;*

— ***Sortie*** *: oui ssi cette formule φ est satisfiable*

Question 12

— ***Entrée*** *: un formule de la logique propositionelle φ en CNF et un $k \in \mathbb{N}$ tel que φ a au plus k variables ;*

— ***Sortie*** *: oui ssi cette formule φ est satisfiable*

Question 13 *On considère l'alphabet $\Sigma = \{(,)\}$.*

— ***Entrée*** *: un mot $w \in \Sigma^*$*

— ***Sortie*** *: oui ssi w est bien parenthésé (cela peut être reformulé en : w est généré par la grammaire $S \to (S) \mid SS \mid \epsilon$).*

Question 14 (*) *On considère l'alphabet $\Sigma = \{(,),[,]\}$.*

— ***Entrée*** *: un mot $w \in \Sigma^*$*

— ***Sortie*** *: oui ssi w est bien parenthésé (cela peut être reformulé en : w est généré par la grammaire $S \to (S) \mid [S] \mid SS \mid \epsilon$).*

Pour conclure

Question 15 — *D'un manière générale, dans quels cas l'usage du non-déterminisme permet d'être (beaucoup) plus efficace ?*

— *Comment les classes de complexité $\mathcal{C}$ présentées plus haut se comparent-elles à leur dual co$\mathcal{C}$? (On rappelle que co$\mathcal{C} = \{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$)*