

Complexité - TD 2.1

Benjamin Bordais

22 Novembre 2021

Les réductions considérées sont en espace logarithmique (sauf spécification contraire).

On rappelle la définition du problème de décision SAT :

- ENTRÉE : une formule propositionnelle ϕ sous forme normale conjonctive
- SORTIE : ϕ est satisfiable

Ce problème est NP-complet.

On donne également la définition suivante d'une coloration d'un graphe. Une k -coloration d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ telle que si $\{u, v\} \in E$ alors $c(u) \neq c(v)$. Le problème 3-COLORATION est défini ainsi :

- ENTRÉE : un graphe non orienté G
- SORTIE : il existe une 3-coloration de G

Ce problème est NP-complet.

Problème NP-complet sur les graphes

Prouver que les problèmes suivant sont NP-complet.

Question 1 (Ensemble indépendant) *Un ensemble indépendant dans un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets dont aucun n'est relié à aucun autre par une arête de G , c'est-à-dire tel que $u, v \in C$ implique $\{u, v\} \notin E$. Démontrer que le langage INDEPENDENT – SET défini comme suit est NP-complet.*

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$;

SORTIE : G a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins m

Solution 1 *Vérifions d'abord que INDEPENDENT – SET \in NP. On peut considérer un algorithme non-déterministe qui devine un ensemble de sommets de cardinal m , puis qui vérifie (en temps polynomial) que celui-ci est bien indépendant (à l'aide de deux boucles imbriqués sur les éléments de cet ensemble). Cet algorithme décide INDEPENDENT – SET en temps polynomial.*

Montrons à présent que ce problème est NP-dur. Pour cela, on construit une réduction f depuis SAT. Considérons une instance $\phi = \bigwedge_{i=1}^p C_i$ avec $C_i = \bigvee_{j=1}^{a_i} l_{i,j}$ et $l_{i,j}$ un littéral, sur les variables $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$. On construit alors le graphe $G_\phi = (V, E)$ tel que $V = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq a_i\} \cup \{x_k, \neg x_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ et $E = \{(l_{i,j}, l_{i,j'}) \mid 1 \leq i \leq p, j, j' \leq a_i, j \neq j'\} \cup \{(x_k, \neg x_k) \mid 1 \leq k \leq p\} \cup \{(x_k, l_{i,j}), (\neg x_k, l_{i',j'}) \mid \text{if } l_{i,j} = \neg x_k \text{ and } l_{i',j'} = x_k\}$. Plus explicitement, à chaque clause on associe un ensemble de sommets (un par littéral) connectés deux à deux. Ainsi, un ensemble indépendant contiendra au plus un élément de chaque clause. De même, pour chaque variable, on a associé deux sommets qui sont connectés. De même, tout ensemble indépendant contiendra au plus l'un de ces deux sommets. On pose alors $f(\phi) = (G_\phi, m)$ avec $m = n + p$. C'est-à-dire, si ensemble indépendant de taille m existe, alors il contient exactement un littéral par clause et, pour

chaque variable, son instance positive ou négative. On peut dès à présent se rendre compte que cette réduction peut s'effectuer en espace logarithmique, car il suffit d'avoir deux boucles imbriquées parcourant l'ensemble des clauses et variables de la formule pour construire les ensembles V et E . Montrons à présent que $\phi \in \text{SAT} \Leftrightarrow f(\phi) \in \text{INDEPENDENT} - \text{SET}$.

Supposons que $\phi \in \text{SAT}$. Alors il existe une valuation des variables $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que chaque clause soit satisfaite – c'est-à-dire qu'il existe (au moins) un littéral parmi chaque clause qui est satisfait. On considère alors comme ensemble indépendant l'ensemble constitué des variables (et de leur négation) satisfaites par la valuation et d'un littéral par clause satisfait par cette valuation. Cet ensemble est bien de taille $m = n + p$. De plus, il est bien indépendant car si un littéral $l_{i,j} = x_k$, alors il y a une arête entre $l_{i,j}$ et $\neg x_k$. Mais si la valuation satisfait $l_{i,j}$, alors l'ensemble considéré contiendra x_k et pas $\neg x_k$, et ainsi il n'y aura pas d'arête entre deux éléments de l'ensemble. De même si $l_{i,j} = \neg x_k$. Il vient que $f(\phi) \in \text{INDEPENDENT} - \text{SET}$.

De manière similaire, supposons $f(\phi) \in \text{INDEPENDENT} - \text{SET}$. D'après les remarques précédentes, un ensemble indépendant F de taille $m = n + p$ contient exactement une variable ou sa négation (ainsi qu'un littéral par clause). Considérons alors la valuation des variables qui correspond aux variables (ou à leur négation) qui est dans F . On peut vérifier que cette valuation satisfait la formule ϕ . En effet, pour chaque clause C_i , considérons le littéral $l_{i,j}$ qui est dans F (on sait qu'il y en a un par clause car $m = n + p$). Par exemple, $l_{i,j} = x_k$. Alors, comme F est indépendant, le nœud $\neg x_k$ n'est pas dans F (car $(l_{i,j}, \neg x_k) \in E$). Donc, $x_k \in F$. Ainsi, la valuation valus positivement la variable x_k , et satisfait donc $l_{i,j}$ et C_i . On en conclut que $\phi \in \text{SAT}$.

Question 2 (Recouvrement) Un recouvrement C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets tel que toute arête de E est incidente à C , c'est-à-dire à au moins un élément de C . Démontrer que le langage **NODE – COVER** défini comme suit est NP-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$;

SORTIE : G a un recouvrement de cardinal au plus m

Solution 2 Ce problème est bien dans NP : on devine un candidat potentiel (ici, un ensemble de taille m), et on vérifie qu'il vérifie bien la propriété souhaitée (en temps polynomial, ici avec une boucle sur les arêtes et une autre pour vérifier qu'un nœud de l'ensemble candidat est l'extrémité de l'arête considéré.)

Pour prouver la NP-dureté, on peut réduire directement depuis le problème précédent en remarquant que : C est un recouvrement de G (de cardinal au plus m) si et seulement si $V \setminus C$ est un ensemble indépendant de G (de cardinal au moins $n - m$) où $n = |V|$. Ainsi la réduction f considéré vérifie $f(G, m) = (G, n - m)$.

Question 3 (Clique) Une clique C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ induisant un sous-graphe complet de G , c'est-à-dire tel que pour tous $u, v \in C$ avec $u \neq v$, on a $\{u, v\} \in E$. Montrer que le problème **CLIQUE** défini comme suit est NP-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$;

SORTIE : G a une clique de cardinal au moins m

Solution 3 Comme pour les deux cas précédents, il est facile de prouver que ce problème est bien dans NP : on devine un candidat potentiel (un ensemble de taille m), et on vérifie qu'il vérifie bien la propriété souhaitée (en temps polynomial, ici avec deux boucles imbriquées sur les paires de sommets de l'ensemble candidat.)

On peut ensuite montrer une réduction depuis INDEPENDENT – SET. Pour un graphe $G = (V, E)$, on considère le graphe $\overline{G} = (V, \overline{E})$, tel que $\overline{E} = \{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$. Alors C est une clique de G si et seulement si C est un ensemble indépendant de \overline{G} . On pose donc $f(G, m) = (\overline{G}, m)$ qui est calculable en espace polynomial, avec une boucle sur les arêtes de G .

Question 4 (Homomorphisme de graphe) Un homomorphisme d'un graphe $G = (V, E)$ à un graphe $G' = (V', E')$ est une fonction $h : V \rightarrow V'$ telle que pour tout $\{v_1, v_2\} \in E$, on a $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$. Montrer que le problème GRAPH – HOMOMORPHISM défini ci-après est NP-complet.

ENTRÉE : deux graphes non orientés, G_1 et G_2 ;

SORTIE : il existe un homomorphisme de G_1 à G_2

Solution 4 On doit toujours vérifier que le problème est dans NP. Comme précédemment, on devine un candidat potentiel (une fonction h représenté par un ensemble de paires dans $V \times V'$), et on vérifie qu'elle vérifie bien la propriété souhaitée (en temps polynomial, ici avec une boucle sur les arêtes de E , puis en consultant la fonction h et l'ensemble E').

Pour ce qui est de la NP-dureté, on peut réduire depuis le problème de 3-COLORATION. En effet, un graphe G est 3-coloriable si et seulement si il existe un homomorphisme entre G et le graphe K_3 (où K_n est le graphe complet (i.e. où tous les sommets sont reliés deux à deux) avec n sommets). Dans ce cas, on a $f(G) = (G, K_3)$ (qui se calcule en espace constant).

Question 5 (Isomorphisme de graphe) Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes si $|V| = |V'|$ et $|E| = |E'|$ et il existe une fonction bijective $h : V \rightarrow V'$ telle que $\{v_1, v_2\} \in E$, si et seulement si $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$. Montrer que le problème GRAPH – ISOMORPHISM défini ci-après est NP-complet.

ENTRÉE : Deux graphes G et H .

QUESTION : G contient un sous-graphe isomorphe à H

Question 6 (Bonus : 3-coloration) Prouver que le problème 3-COLORATION est NP-complet. Pour prouver la NP-dureté de ce problème, on pourra effectuer une réduction depuis le problème 3-SAT, également NP-complet, qui est une restriction de SAT aux formules avec au plus trois littéraux par clause.