Exercice 0 :
Donner explicitement la fonction de transition d'une machine de Turing à deux rubans qui étant donné un mot sur le premier, le recopie sur le deuxième, puis reviens au début des rubans et accepte.

Exercice 1 :
Donner explicitement la fonction de transition d'une machine de Turing à deux rubans qui étant donné deux mots u, v d'un alphabet d'entrée $\Gamma = \Sigma \setminus \{\$, B\}$ (un mot sur chaque ruban), accepte le couple (u, v) si $u = v$ et rejette sinon.

Exercice 2 :
Donner explicitement la fonction de transition d'une machine de Turing qui, sur l'entrée vide, énumère tous les entiers naturels (en binaire, bit de poids faible à gauche) dans l'ordre usuel. Plus précisément : la machine écrit l'entier n, puis la tête de lecture revient à l'origine, puis la machine écrit l'entier $n+1$, puis la tête de lecture revient à l'origine, etc.

Exercice 3 :
Parmi les 3 fonctions suivants (de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$) , 2 sont calculables et, pour la 3ème, on ne sait pas actuellement si elle est calculable ou non. Dire (en le justifiant) quelles sont les deux fonctions calculables.

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{S'il existe une vie extra-terrestre} \\ 1 & \text{Sinon} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si le développement décimal de } \pi \text{ contient au moins } x \text{ 1 consécutifs} \\ 1 & \text{Sinon} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si le développement décimal de } \pi \text{ contient exactement } x \text{ 1 consécutifs} \\ 1 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Exercice 4 :
Montrer que la classe des langages récursifs est close par les opérations Booléennes : intersection, union, complémentaire.

Exercice 5 :
Soit f une fonction calculable. Montrer que l'image de f est un langage récursivement énumérable.

Exercice 6 :
Montrer que la classe des langages récursivement énumérables est close par union et intersection.

Exercice 7 :
Montrer que L est un langage récursivement énumérable, si et seulement s'il existe une machine de Turing M à deux rubans et un état q_e de M tels que,

$(\epsilon, q_0, \$, \$) \vdash_M^* (\epsilon, q_e, \$w', \$w)$ si et seulement si $w \in L$.