Aspects probabilistes de l'informatique
Examen 2017/2018

Dans la suite, h est l'histoire aléatoire d'un MDP. Soit Ev un événement d'un MDP $\mathcal{M}$ et s un état de $\mathcal{M}$. On note $\mathbf{Pr}^{\sup}_{\mathcal{M},s}(Ev) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{Pr}^{\boldsymbol{\pi}}_{\mathcal{M},s}(Ev))$. On dote les états d'une priorité entière définie par la fonction pri et on note $S_{\leq d} = \{s \in S \mid pri(s) \leq d\}$.

Partie 1 : Trappe d'un MDP

Soit $\mathcal{M}$ un MDP et T un sous-ensemble d'états. Soit $h = s_0 a_0 s_1 \dots$ une histoire, on dit que T est une *trappe* pour h si pour tout $i \geq 0$, $s_i \in T$.

Soit $Tr(T)$ défini par $s \in Tr(T)$ ssi $\mathbf{Pr}^{\sup}_{\mathcal{M},s}(T \text{ est une trappe pour } h) = 1$.

Question 1. Proposer un algorithme de calcul en temps polynomial de $Tr(T)$.

Si $Tr(T)$ est non vide, on définit le MDP $\mathcal{M}_T$ par :

— L'ensemble des états est $Tr(T)$;

— L'ensemble des actions issues de s est :
$A_{s,T} = \{a \in A_s \mid \forall s' \; p(s'|s,a) > 0 \Rightarrow s' \in Tr(T)\}$.

Question 2. Montrer que $\mathcal{M}_T$ est bien défini, i.e. pour tout $s \in Tr(T)$: $A_{s,T} \neq \emptyset$.

Question 3. Calculer $\mathcal{M}_{S_{\leq 2}}$ pour le MDP de la figure 1.

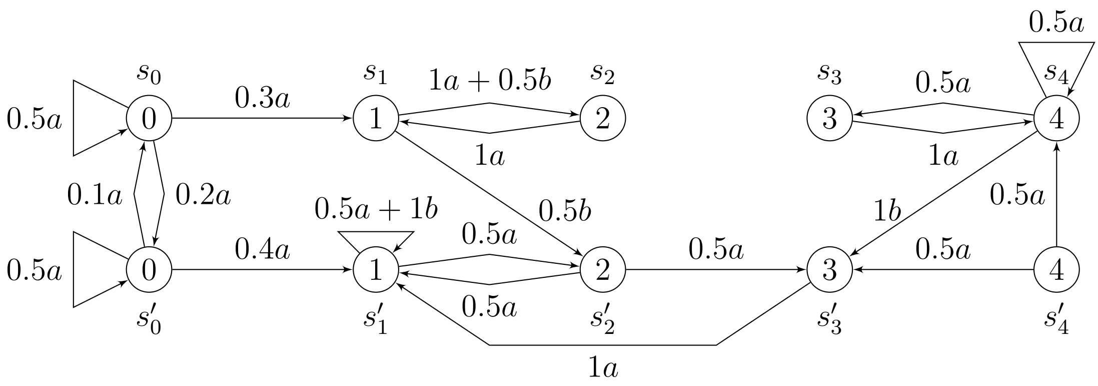

FIGURE 1 – Un MDP avec des priorités.

Partie 2 : Visites dans un MDP

Soit $\mathcal{M}$ un MDP et T un sous-ensemble d'états. Soit $h = s_0 a_0 s_1 \dots$ une histoire, on dit que h *visite* T s'il existe $i \geq 1$ tel que $s_i \in T$.

Question 4. Dérouler l'algorithme 20 sur le MDP $\mathcal{M}_{S_{\leq 2}}$ de la figure 1 avec $T = pri^{-1}(2)$.

Soit T_1 défini par $s \in T_1$ ssi $\mathbf{Pr}^{\sup}_{\mathcal{M},s}(h \text{ visite } T) = 1$.

Question 5. Notons $Vis_0 = S$, $Av_0[s] = A_s$ et Vis_n et Av_n les variables Av et Vis à la fin de la n-ième itération de l'algorithme 20. Montrer que pour tout n :

— $Vis_{n+1} \subseteq Vis_n$;

— Pour tout $s \in Vis_n$, et tout $a \in Av_n[s]$, $\sum_{s' \in Vis_n \cup T} p(s'|s,a) = 1$;

— Il existe une politique déterministe stationnaire $\boldsymbol{\pi}_{n+1}$ qui pour tout $s \in Vis_{n+1}$ (1) vérifie $\boldsymbol{\pi}_{n+1}(s) \in Av_n[s]$ et (2) garantit une probabilité strictement positive d'atteindre T en au plus $|Vis_{n+1}|$ étapes.

Question 6. Soit N la dernière itération de l'algorithme 20. En observant que $Vis_N = Vis_{N-1}$, montrer que la politique $\boldsymbol{\pi}_N$ garantit pour tout $s \in Vis_N$ une probabilité 1 d'atteindre T.

Question 7. Montrer que pour tout $s \in Vis_0 \setminus Vis_1$, $\mathbf{Pr}^{\text{sup}}_{\mathcal{M},s}(h \text{ visite } T) = 0$.

Question 8. Montrer par induction que pour tout n :

— Pour tout $s \in Vis_n \setminus Vis_{n+1}$, $\mathbf{Pr}^{\text{sup}}_{\mathcal{M},s}(h \text{ visite } T) < 1$.

— Pour tout $s \in Vis_{n+1}$ et toute politique stationnaire déterministe $\boldsymbol{\pi}$ telle que $\boldsymbol{\pi}(s) \in Av_n[s] \setminus Av_{n+1}[s]$, $\mathbf{Pr}^{\boldsymbol{\pi}}_{\mathcal{M},s}(h \text{ visite } T) < 1$.

Question 9. Conclure que l'algorithme 20 calcule T_1 et donner sa complexité en fonction de $|S|$ et de $|A|$.

Indication : Pour les deux questions suivantes, on pourra utiliser l'algorithme 20.

Soit T_k pour $k \geq 1$ défini par $s \in T_k$ ssi $\mathbf{Pr}^{\text{sup}}_{\mathcal{M},s}(h \text{ visite au moins } k \text{ fois } T) = 1$.

Question 10. Proposer un algorithme de calcul en temps polynomial de T_k (avec k également entrée du problème).

Soit T_∞ défini par $s \in T_\infty$ ssi $\mathbf{Pr}^{\text{sup}}_{\mathcal{M},s}(h \text{ visite infiniment souvent } T) = 1$.

Question 11. Proposer un algorithme de calcul en temps polynomial de T_∞.

Algorithme 1 : Calcul des états visitant presque sûrement T

Visite($\mathcal{M}, T$)
Input : un MDP $\mathcal{M}$, un sous-ensemble d'états T
Output : l'ensemble des états visitant presque sûrement T
Data : un état s, des sous-ensembles d'états $Vis, oldVis, Temp, oldTemp$
Data : une action a, un tableau d'ensembles d'actions Av
$Vis \leftarrow S$; **for** $s \in S$ **do** $Av[s] \leftarrow A_s$
repeat
    $oldVis \leftarrow Vis$; $Temp \leftarrow \emptyset$
    repeat
        $oldTemp \leftarrow Temp$
        for $s \in Vis$ **do**
            for $a \in Av[s]$ **do**
                if $\sum_{s' \in Temp \cup T} p(s'|s,a) > 0$ **then** $Temp \leftarrow Temp \cup \{s\}$
            end
        end
    until $Temp = oldTemp$
    $Vis \leftarrow Temp$
    for $s \in S$ **do**
        for $a \in Av[s]$ **do**
            if $\sum_{s' \in Vis \cup T} p(s'|s,a) < 1$ **then** $Av[s] \leftarrow Av[s] \setminus \{a\}$
        end
    end
until $Vis = oldVis$
return(Vis)

Partie 3 : Parité dans un MDP

Etant donné une histoire $h = s_0 a_0 s_1 \ldots$, l'ensemble $\mathit{Inf}(h)$ est défini par :

$$\mathit{Inf}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in S \mid \forall i \in \mathbb{N}\ \exists j > i\ \ s_i = s\}$$

Soit $pri(h) \stackrel{\text{def}}{=} \max(pri(s) \mid s \in \mathit{Inf}(h))$, on dit que h est *paire* si $pri(h)$ est pair.

Soit d une priorité paire telle $pri^{-1}(d) \neq \emptyset$.

Question 12. Montrer que pour tout $s \in Tr(S_{\leq d})$,
$\mathbf{Pr}^{\text{sup}}_{\mathcal{M}_{T_{\leq d}},s}(h \text{ visite infiniment souvent } pri^{-1}(d)) = 1$ implique $\mathbf{Pr}^{\text{sup}}_{\mathcal{M},s}(h \text{ est paire}) = 1$.

On note $W_d = \{s \in Tr(S_{\leq d}) \mid \mathbf{Pr}^{\text{sup}}_{\mathcal{M}_{T_{\leq d}},s}(h \text{ visite infiniment souvent } pri^{-1}(d)) = 1\}$.

On rappelle que d'après les résultats sur les jeux stochastiques, il existe une politique stationnaire déterministe optimale pour les MDP dont l'objectif est la parité.

Question 13. Montrer que pour tout $s \in S$,
$\mathbf{Pr}^{\text{sup}}_{\mathcal{M},s}(h \text{ est paire}) = \mathbf{Pr}^{\text{sup}}_{\mathcal{M},s}(h \text{ atteint } \bigcup_{d \text{ pair}} W_d)$.
En déduire qu'il existe un algorithme en temps polynomial pour le calcul des probabilités maximales de parité de l'histoire.

Question 14. Calculer les probabilités maximales de parité du MDP de la figure 1.