Aspects probabilistes de l'informatique
Examen MPRI 2016/2017

Partie 1 : Couplage de distributions

Soit deux distributions π et π' sur un ensemble fini S. Notons $\pi(S') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \in S'} \pi(s)$ pour $S' \subseteq S$.
La *distance de variation totale* entre π et π' est définie par :

$$\|\pi - \pi'\|_{\mathsf{TV}} \stackrel{\text{def}}{=} \max(\pi(S') - \pi'(S') \mid S' \subseteq S)$$

Question 1. Montrer que :

$$\|\pi - \pi'\|_{\mathsf{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{s \in S} |\pi(s) - \pi'(s)|$$

On définit pour tout $s \in S$, $m(s) \stackrel{\text{def}}{=} \min(\pi(s), \pi'(s))$ et $m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \in S} m(s)$.
Question 2. Montrer que :

$$\|\pi - \pi'\|_{\mathsf{TV}} = 1 - m$$

Un *couplage* de deux distributions π et π' est un couple variables aléatoires (X, Y) sur $S \times S$ tel que pour tout $s \in S$, $\mathbf{Pr}(X = s) = \pi(s)$ et $\mathbf{Pr}(Y = s) = \pi'(s)$.
Par exemple, (X, Y) défini par $\mathbf{Pr}(X = s, Y = s') \stackrel{\text{def}}{=} \pi(s)\pi'(s')$, fournit un couplage. Contrairement à cet exemple, les variables aléatoires X et Y peuvent ne pas être indépendantes.
Question 3. Montrer que pour tout couplage (X, Y) :

$$\|\pi - \pi'\|_{\mathsf{TV}} \leq \mathbf{Pr}(X \neq Y)$$

Lorsque $m = 0$, $\|\pi - \pi'\|_{\mathsf{TV}} = 1$ et par conséquent l'inégalité ci-dessus devient une égalité.
Lorsque $m = 1$, $\|\pi - \pi'\|_{\mathsf{TV}} = 0$ et étant donné une variable aléatoire X de distribution π, le couple (X, X) est un couplage qui vérifie l'égalité.

Supposons que $0 < m < 1$ et définissons le couple de variables aléatoires (X, Y) par la procédure suivante.

On tire une pièce avec une probabilité de face égale à m.

1. Si le tirage est face, alors :
   on choisit un état aléatoire Z avec $\mathbf{Pr}(Z = s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m(s)}{m}$ et on fixe $X = Y = Z$.
2. Si le tirage est pile, alors :
   X a une probabilité de distribution $\mathbf{Pr}_x$ définie par : $\mathbf{Pr}_x(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\max(\pi(s) - \pi'(s), 0)}{\|\pi - \pi'\|_{\mathsf{TV}}}$
   et Y a une probabilité de distribution $\mathbf{Pr}_y$ définie par : $\mathbf{Pr}_y(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\max(\pi'(s) - \pi(s), 0)}{\|\pi - \pi'\|_{\mathsf{TV}}}$

Question 4. Montrer que (X, Y) est un couplage.
Question 5. Montrer que ce couplage vérifie :

$$\|\pi - \pi'\|_{\mathsf{TV}} = \mathbf{Pr}(X \neq Y)$$

Partie 2 : Couplage de DTMC

Soit $\mathbf{P}$ une matrice de transition d'une DTMC finie $\mathcal{M}$ d'ensemble d'états S. Un *couplage* de $\mathcal{M}$ est une DTMC $\mathcal{M}_c$ d'ensemble d'états $S \times S$ avec une matrice de transition $\mathbf{P}_c$ qui vérifie :
— $\forall s_1, s'_1, s_2 \in S$, $\sum_{s'_2 \in S} \mathbf{P}_c[(s_1, s_2), (s'_1, s'_2)] = \mathbf{P}[s_1, s'_1]$
— $\forall s_1, s_2, s'_2 \in S$, $\sum_{s'_1 \in S} \mathbf{P}_c[(s_1, s_2), (s'_1, s'_2)] = \mathbf{P}[s_2, s'_2]$
— $\forall s_1, s_2 \in S$, $\mathbf{P}_c[(s_1, s_1), (s_2, s_2)] = \mathbf{P}[s_1, s_2]$
On note $\{(X_t, Y_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ le comportement de $\mathcal{M}_c$, la première (resp. seconde) condition signifie que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ (resp. $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{N}}$) est une DTMC avec une matrice de transition $\mathbf{P}$ tandis que le troisième indique que lorsque $X_t = Y_t$ pour un certain t, alors $X_{t'} = Y_{t'}$ pour tout $t' \geq t$.

Dans la suite, on note $\mathbf{Pr}_{s,s'}$ la mesure de probabilité associée au couplage lorsque $\mathcal{M}_c$ démarre dans l'état (s, s') et $\mathbf{1}_s$ la distribution sur S définie par : $\mathbf{1}_s[s] = 1$.

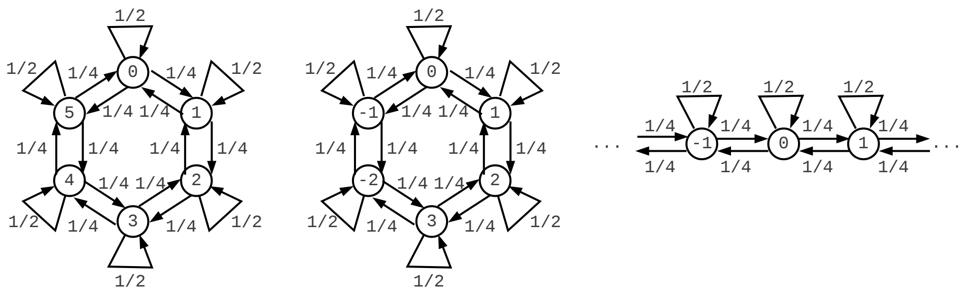
Question 6. Montrer que pour tout $s, s' \in S$ et $t \in \mathbb{N}$:

$$\|\mathbf{1}_s\mathbf{P}^t - \mathbf{1}_{s'}\mathbf{P}^t\|_{\mathsf{TV}} \leq \mathbf{Pr}_{s,s'}(X_t \neq Y_t)$$

Question 7. On suppose que $\mathcal{M}$ est ergodique et on note π_t sa distribution au temps t et π_∞ sa distribution stationnaire. Montrer que pour tout $s, s' \in S$, π_0, une distribution initiale, et $t \in \mathbb{N}$:

$$\|\pi_{t+1} - \pi_\infty\|_{\mathsf{TV}} \leq \|\pi_t - \pi_\infty\|_{\mathsf{TV}} \leq \max(\mathbf{Pr}_{s,s'}(X_t \neq Y_t) \mid s, s' \in S)$$

Partie 3 : temps de mélange d'une chaîne aléatoire



On considère une marche aléatoire sur $S = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ définie par la matrice $\mathbf{P}$ (voir la partie gauche de la figure ci-dessus) :

$$\mathbf{P}[i,i] = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{P}[i, i+1 \bmod n] = \frac{1}{4} \text{ et } \mathbf{P}[i, i-1 \bmod n] = \frac{1}{4}$$

On construit un couplage de la marche aléatoire comme suit. Imaginons que les deux *marcheurs* sont dans des positions différentes $i_1 \neq i_2$. On tire une pièce non biaisée. En cas de face (resp. pile), alors le premier (resp. second) marcheur va en position $i_1 + 1 \bmod n$ (resp. $i_2 + 1 \bmod n$) ou $i_1 - 1 \bmod n$ (resp. $i_2 - 1 \bmod n$) avec probabilité $\frac{1}{2}$. Lorsqu'ils sont dans la même position, ils se déplacent ensemble comme spécifié by $\mathbf{P}$.

Question 8. Montrer que la DTMC ainsi définie est un couplage de la marche aléatoire.

Question 9. Considérons la différence $D_t \stackrel{\text{def}}{=} (Y_t - X_t) \bmod n$ avec $\{(X_t, Y_t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ le couplage défini ci-dessus. Montrer que D_t est une chaîne de Markov sur $0, 1, \ldots, n-1$ avec état absorbant 0 et décrire sa matrice de transition.

Question 10. Montrer que $t(i)$, le temps moyen d'absorption de $\{D_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ démarrant avec une différence $0 < i < n$ vérifie (avec $t(0) = 0$) :

$$t(i) = 1 + \frac{1}{2}(t(i+1 \bmod n) + t(i-1 \bmod n))$$

Question 11. Déterminer $t(i)$.

On rappelle l'inégalité de Markov $\mathbf{Pr}(U \geq \tau) \leq \frac{\mathbf{E}(U)}{\tau}$ pour U une variable aléatoire non negative.

Question 12. Deduire des questions 7 et 11 qu'il existe une constante C indépendante de n telle que pour toute distribution initiale π_0 de la marche aléatoire et tout $t > 0$:

$$\|\pi_t - \pi_\infty\|_{\mathsf{TV}} \leq \frac{Cn^2}{t}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on définit $\mathsf{tmix}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \min(t \mid \|\pi_t - \pi_\infty\|_{\mathsf{TV}} \leq \varepsilon \text{ pour tout } \pi_0)$. La question 12 montre que pour tout ε, il existe c_ε telle que $\mathsf{tmix}(\varepsilon) \leq c_\varepsilon n^2$.

A partir de maintenant, on change l'identifiant des états $S \stackrel{\text{def}}{=} \{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, -1, 0, 1, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ (voir la partie centrale de la figure ci-dessus). On suppose que la marche aléatoire démarre en 0. Observons qu'elle est indistinguable d'une marche aléatoire $\{S_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}$ aussi longtemps que $\{S_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ reste dans S (voir la partie droite de la figure ci-dessus). Etant donné un instant t_0,

— soit E l'événement '$\exists t \leq t_0 \ |S_t| \geq \frac{n}{4}$' et

— soit E_t l'événement '$\forall t' \leq t \ |S_{t'}| < \frac{n}{4}$ and $|S_t| \geq \frac{n}{4}$'.

Alors $E = \biguplus_{t \leq t_0} E_t$. Par conséquent :

$$\mathbf{Pr}(E) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_E) = \sum_{t \leq t_0} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{E_t})$$

où la variable aléatoire $\mathbf{1}_E$ est l'indicatrice de l'événement E.

On rappelle que $\mathbf{V}(U+V) = \mathbf{V}(U) + \mathbf{V}(V)$ et $\mathbf{E}(UV) = \mathbf{E}(U)\mathbf{E}(V)$ lorsque U et V sont indépendants.

Question 13.

— Montrer que pour tout t, $\mathbf{E}(S_t^2) = \frac{t}{2}$.
Indication : On remarquera que S_t s'obtient comme la somme de t déplacements aléatoires indépendants et de même loi et on appliquera les résultats sur la variance.

— Montrer que pour tout $t \leq t_0$, $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{E_t} S_{t_0}^2) \geq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{E_t} S_t^2) \geq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{E_t}) cn^2$ pour une certaine constante strictement positive c.
Indication : écrire $S_{t_0}^2$ comme $(S_t + (S_{t_0} - S_t))^2$

— Déduire que $\mathbf{Pr}(E) \leq \frac{t_0}{2cn^2}$.
Indication : considérer $\mathbf{E}(S_{t_0}^2 (\sum_{t \leq t_0} \mathbf{1}_{E_t}))$

Question 14. Deduire que pour tout $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$, $\mathsf{tmix}(\varepsilon) \geq \frac{cn^2}{2}$.