DM de Complexité (L3)

à rendre avant le mercredi 20 à 14h

Ce devoir n'est ni long ni difficile mais les correcteurs attendent une rédaction soignée. D'où le conseil suivant : commencez la rédaction au brouillon avant de finaliser, ne vous y prenez pas au dernier moment pour rédiger la copie finale, relisez-vous soigneusement (idéalement : un autre jour) avant de rendre votre copie. **Attention : la date limite ne sera pas repoussée**.

Seules les questions marquées d'une étoile demandent soit un peu d'inventivité, soit une construction un peu lourde à mettre en place. Les autres questions sont élémentaires et ne demandent que d'avoir compris les concepts vu en cours.

Exercice 1 : Formules booléennes et arithmétique.

On note $\mathsf{NATURALS}$ le langage des nombres entiers naturels écrits en binaire, i.e., sur l'alphabet $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Pour fixer les choses, on considère qu'il s'agit de nombres écrits sans marqueurs particuliers, commençant par le chiffre le plus significatif : `1101` représente le nombre 13. On considère que toute suite de chiffre est valide et représente un nombre. Ainsi, le nombre 0 peut être représenté par « `0` », par « `000` », mais aussi par le mot vide, ϵ. On note $\mathsf{PROPFORMULAS}$ le langage des formules booléennes propositionnelles, telles que « $\top$ », « $p \vee \neg q$ », « $(q_1 \vee q_2) \implies \perp$ », ..., écrites dans la syntaxe de votre choix qu'on ne cherchera pas à préciser en détail. $\mathsf{SAT} \subseteq \mathsf{PROPFORMULAS}$ est le langage des formules satisfaisables et $\mathsf{DIV3} \subseteq \mathsf{NATURALS}$ est le langage des entiers divisibles par 3.

1. Définissez une réduction logspace $f : \Sigma^* \to \mathsf{PROPFORMULAS}$ montrant que $\mathsf{DIV3} \leq \mathsf{SAT}$. Énoncez et démontrez sa correction.

On considère $\mathsf{COMPOSITES} \subseteq \mathsf{NATURALS}$ qui est le langage des nombres entiers ≥ 2 qui ne sont pas des nombres premiers.

(*) 2. Définissez une réduction logspace $f : \Sigma^* \to \mathsf{SAT}$ montrant $\mathsf{COMPOSITES} \leq \mathsf{SAT}$. Énoncez et démontrez sa correction.

Exercice 2 : Langages des sous-mots

On considère des mots $u, v, w, \ldots$ sur un alphabet fini Σ. On note $u \preceq v$ si u est un sous-mot de v, c.-à-d., est obtenu en supprimant des lettres n'importe où dans v. P.ex. $\mathtt{baba} \preceq \mathtt{barbara}$. On note $\downarrow u$ l'ensemble des sous-mots de u et, pour un langage $L \subseteq \Sigma^*$, $\downarrow L$ l'ensemble des sous-mots d'un mot de L. P.ex. $\downarrow(\mathtt{abac})^+ = (\mathtt{a} + \mathtt{b} + \mathtt{c})^*$.

3. Soit Σ fixé avec $|\Sigma| \geq 2$.
   Dites si les langages suivants sont dans NP ?, P ?, NL ?, L ?, $\mathsf{SPACE}(0)$?
   — $L_1 = \{(u, v) \mid u \preceq v\}$,
   — $L_2 = \{(u, v) \mid \exists w : u \preceq w \wedge v \preceq w\}$,
   — $L_3 = \{(u_1, u_2, \ldots, u_k, n) \mid \exists w : |w| = n \wedge w \preceq u_1 \wedge \cdots \wedge w \preceq u_k\}$ (NB : $n \in \mathbb{N}$),
   — $L_4 = \{(u, v) \mid \exists w : u \preceq w \wedge w.w \preceq v\}$.
   Pour cette question, et puisque $\mathsf{SPACE}(0) \subseteq \mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} \subseteq \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$, on demande d'indiquer la plus petite classe où vous savez situer chaque problème, et de justifier votre réponse pour

l'appartenance. On ne demande pas de preuve de non-appartenance aux classes inférieures, ni de preuve de difficulté comme « L est NP-complet ».

Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, I, F, \Delta)$ un automate fini non déterministe sur l'alphabet Σ. On note $n_{\mathcal{A}} = |Q|$ son nombre d'états et $L(\mathcal{A})$ le langage qu'il reconnaît.

4. Montrez que le langage $\{(u, \mathcal{A}) \mid u \in L(\mathcal{A})\}$, c.-à-d. le problème, étant donnés un mot et un automate non déterministe, de dire si le mot est accepté par l'automate, est dans P.
5. Montrez que le langage $\downarrow L(\mathcal{A})$ des sous-mots de $L(\mathcal{A})$ est reconnu par un automate non déterministe $\mathcal{A}'$ tel que $n_{\mathcal{A}'} \leq n_{\mathcal{A}}$.
6. (*) Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux automates finis non déterministes sur l'alphabet Σ. Montrez que si $\downarrow L(\mathcal{A}) \not\subseteq \downarrow L(\mathcal{B})$ alors il existe un mot u tel que $u \in \downarrow L(\mathcal{A})$, $u \notin \downarrow L(\mathcal{B})$ et $|u| \leq n_{\mathcal{B}}$.
7. On note $\mathsf{NO\_LESS\_SUBWORDS}^{\Sigma}_{ND}$ le langage des paires $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ d'automates non déterministes sur Σ tels que $L(\mathcal{A}) \not\subseteq \downarrow L(\mathcal{B})$. Montrez que ce langage est dans NP.
8. Pour $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, montrez que $\mathsf{3SAT} \leq \mathsf{NO\_LESS\_SUBWORDS}^{\Sigma}_{ND}$. Décrivez précisément votre construction, énoncez tous les points nécessaires à sa correction, et justifiez les.

   Indication : on pourra chercher à associer à toute formule booléenne en forme normale conjonctive $\phi \equiv \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{3} l_{i,j}$, où chaque littéral $l_{i,j}$ est soit une variable booléenne $x_{i,j}$, soit la négation $\neg x_{i,j}$ d'une variable booléenne, prise parmi l'ensemble $Var_{\phi} = \{x_1, \ldots, x_r\}$, un automate non déterministe sur Σ qui reconnaît exactement l'ensemble des mots $b_1 \cdots b_r \in \Sigma^r$ tels que la valuation $v_{b_1 \cdots b_r}$ satisfait $\neg\phi$. Ici on identifie de façon canonique un mot de Σ^r et une valuation $v : Var_{\phi} \to \{\top, \bot\}$ des variables de ϕ.
9. (*) On note $\mathsf{NO\_LESS\_SUBWORDS}^{\Sigma}_{D}$ pour le fragment de $\mathsf{NO\_LESS\_SUBWORDS}^{\Sigma}_{ND}$ réduit aux automates déterministes. Montrez que $\mathsf{3SAT} \leq \mathsf{NO\_LESS\_SUBWORDS}^{\Sigma}_{D}$, toujours pour $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.
10. Quels problèmes parmi $\mathsf{NO\_LESS\_SUBWORDS}^{\Sigma}_{D}$ et $\mathsf{NO\_LESS\_SUBWORDS}^{\Sigma}_{ND}$ sont NP-complets ? On répondra dans les trois cas suivants : $|\Sigma|=2$, $|\Sigma| > 2$, et $|\Sigma| = 1$.