Examen du cours Complexité (L3)

Date : 18 janv. 2018 / Durée : 2 heures

Partie 1

On considère des conjonctions de 3-clauses de la forme $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$ où chaque clause $C_i = \bigvee_{j=1}^{3} l_{i,j}$ est une disjonction d'*exactement* 3 littéraux, chaque littéral étant une variable booléenne x ou sa négation $\neg x$. On notera $\mathit{Var}(\phi)$ pour l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_k\}$ des variables apparaissant dans ϕ. Sans être plus précis, on sait que la taille $n = |\phi|$ de ces formules est en $m^{O(1)}$.

Par ailleurs, le sujet utilise parfois des formules booléennes avec quantificateurs : il s'agit exactement des formules considérées pour le problème QBF —aussi appelé QSAT— vu en cours.

1A. Alors que 3SAT est le problème de savoir s'il existe une valuation $v : \mathit{Var}(\phi) \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ qui valide une formule ϕ, le problème 1-in-3SATconsiste à décider, étant donné ϕ, s'il existe une valuation v qui valide *exactement* un littéral par 3-clause de ϕ.

1. Est-ce que $x \vee y \vee \neg x$ est dans 1-in-3SAT ? Quelles valuations conviennent ?
2. Expliquez ce que veut dire « 1-in-3SAT $\subseteq$ 3SAT » et justifiez cette inclusion.
3. Montrez que le problème 1-in-3SAT est dans NP.

On note $R(x, y, z)$ le prédicat qui est vrai si et seulement si exactement une des trois propositions x, y, z est vraie.

4. Démontrez que la formule $x \vee y \vee z$ est équivalente à la formule existentiellement quantifiée :

$$\exists a, b, c, d, e, f : R(x, a, d) \wedge R(y, b, d) \wedge R(z, c, \mathbf{false}) \wedge R(a, b, e) \wedge R(c, d, f) \,.$$

5. Montrez que la formule $R(x, y, \mathbf{false})$ est équivalente à la formule existentiellement quantifiée : $\exists g : R(x, y, g) \wedge R(g, g, \neg g)$.
6. En vous servant des questions 4 et 5, construisez une réduction de 3SAT vers 1-in-3SAT. Validez sa correction. Déduisez-en la complexité de 1-in-3SAT.

1B. Le problème distinct-3SAT, donné par une conjonction de m clauses de trois littéraux *distincts* (parmi k propositions ou leur négation), consiste à décider s'il existe une interprétation v des propositions telle que toute clause soit vraie.

7. Montrez que le problème distinct-3SAT est dans NP.
8. Est ce que l'inclusion distinct-3SAT $\subseteq$ 3SAT entre langages est vérifiée ?
9. Construisez une réduction de 3SAT vers distinct-3SAT. Validez sa correction. Déduisez-en la complexité de distinct-3SAT.
   Indication : Pour une clause de la formule originelle qui contient deux littéraux distincts on construira deux clauses à trois littéraux distincts à l'aide d'une nouvelle variables booléenne. Pour une clause de la formule originelle qui contient un seul littéral on construira quatre clauses à trois littéraux distincts à l'aide de deux nouvelles variables booléennes.

1C. Le problème NAE-3SAT (NAE pour "Not all equal"), consiste à décider, étant donnée une conjonction ϕ de m clauses de trois littéraux *distincts* (parmi k variables booléennes ou leur négation), s'il existe une valuation v qui dans chacune des clauses valide au moins un littéral *et* en invalide au moins un. (On dit alors que v satisfait la condition NAE pour ϕ).

10. Montrez que si une formule admet une valuation satisfaisant la condition NAE alors elle en admet au moins deux (sauf exception dans un cas limite à préciser).
11. Quelles inclusions sont vérifiées entre NAE-3SAT et les problèmes mentionnés plus haut ?
12. Montrez que le problème NAE-3SAT est dans NP.
13. On note $N(x, y, z)$ le prédicat qui est vrai ssi une au moins des trois propositions est vraie, et une au moins est fausse. Démontrez que la formule $x \vee y \vee z$ est équivalente à la formule $\exists a : N(x, y, a) \wedge N(z, \neg a, \textbf{false})$.
14. Montrez que NAE-3SAT est NP-complet.

Partie 2

On considère un graphe non orienté $G = (V, E)$ où chaque arête e est dotée d'un débit (un entier naturel). Le problème de *commutation de flots* consiste à affecter une orientation à chaque arête de G telle que la somme des débits entrant en chaque sommet soit égale à la somme des débits sortant du sommet. Nous avons présenté ci-dessous, un tel graphe et une solution possible.

15. Dans ce problème on va s'intéresser au problème de décision associé : « existe-t-il une orientation des arêtes telle que ... » sans forcément calculer une solution. Montrez que le problème de commutation de flots est dans NP.

Soit $\phi = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$ une conjonction de m clauses de trois littéraux distincts. Les variables booléennes de ϕ sont notées $p_1, \ldots, p_n$, et on note $C_j = l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3}$. On note α_i (resp. β_i) le nombre d'occurrences de p_i (resp. $\neg p_i$) dans les clauses. Sans perte de généralité on suppose que $\alpha_i + \beta_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

On construit le graphe G_ϕ suivant :
— l'ensemble des sommets V est donné par $V = \{p_i, \neg p_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{C_j \mid 1 \leq j \leq m\} \cup \{z\}$;
— l'ensemble des arêtes E est défini par $E = L \cup C \cup D$, où :
— $L = \{\{p_i, \neg p_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$. Le débit de l'arête $\{p_i, \neg p_i\}$ est $\alpha_i + \beta_i$.
— $C = \{\{C_j, l_{j,a}\} \mid 1 \leq j \leq m \wedge 1 \leq a \leq 3\}$. Le débit de ces arêtes est 1.
— $D = \{\{z, C_j\} \mid 1 \leq j \leq m\} \cup \{\{z, p_i\} \mid 1 \leq i \leq n \wedge \beta_i > 0\} \cup \{\{z, \neg p_i\} \mid 1 \leq i \leq n \wedge \alpha_i > 0\}$. Le débit de l'arête $\{z, C_j\}$ est 1. Le débit de l'arête $\{z, p_i\}$ est β_i. Le débit de l'arête $\{z, \neg p_i\}$ est α_i.

16. Construisez G_ϕ pour $\phi = \{p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3, p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3\}$. Montrez que ce graphe admet une commutation de flots.
17. Montrez que s'il existe une valuation v satisfaisant la condition NAE pour ϕ alors G_ϕ admet une commutation de flots. On vérifiera en particulier la contrainte de flots sur les sommets C_j et sur le sommet z.
18. Toujours dans G_ϕ, on considère l'ensemble des arêtes adjacentes aux deux sommets p_i et $\neg p_i$. Montrez qu'il n'y a que deux orientations possibles de cet ensemble d'arêtes qui puissent apparaître dans une solution au problème de commutation de flots.
19. Montrez que si G_ϕ admet une commutation de flots alors ϕ est une instance positive du problème NAE-3SAT. Indiquez la valuation appropriée. Déduisez-en que le problème de commutation de flots est NP-complet.
20. Montrez que le problème de commutation de flots est dans PTIME si les débits sont tous égaux à 1.
21. Le problème de commutation de flots reste-t-il NP-complet si les débits sont exprimés en représentation unaire ? Justifiez votre réponse.