Complexité : TD 2

Chargé de TD : Adrien Koutsos

Exercice 1 (3-SAT-3-OCC) Le problème 3-SAT-3-OCC est le suivant :
ENTRÉE : une liste finie, S, de 3-clauses, où chaque variable propositionnelle apparaît au plus 3 fois ;
QUESTION : S est-elle satisfiable ?

Montrer que 3-SAT-3-OCC est **NP**-complet, même lorsque chaque littéral a, au plus, 2 occurences dans la formule.

Exercice 2 (INDEPENDENT SET) Un *ensemble indépendant* dans un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets dont aucun n'est relié à aucun autre par une arête de G, c'est-à-dire tel que $u, v \in C$ implique $\{u, v\} \notin E$.

— Démontrer que le langage INDEPENDENT SET défini comme suit est **NP**-complet.
  ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;
  QUESTION : G a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins m ?
— Montrer que INDEPENDENT SET reste **NP**-complet même lorsqu'il est restreint aux graphes où chaque sommet est au plus de degré 4.

Exercice 3 (NODE COVER) Un *recouvrement* C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets tel que toute arête de E est incidente à C, c'est-à-dire à au moins un élément de C. Démontrer que le langage NODE COVER défini comme suit est **NP**-complet.
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;
QUESTION : G a-t-il un recouvrement de cardinal au plus m ?

Exercice 4 (CLIQUE) Une *clique* C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ induisant un sous-graphe complet de G, c'est-à-dire tel que pour tous $u, v \in C$ avec $u \neq v$, on a $\{u, v\} \in E$. Montrer que le problème CLIQUE défini comme suit est **NP**-complet.
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;
QUESTION : G a-t-il une clique de cardinal au moins m ?

Exercice 5 (3-COLORING) Une *k-coloration* d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \to \{0, \ldots k-1\}$ telle que si $\{u, v\} \in E$ alors $c(u) \neq c(v)$.

ENTRÉE : un graphe non orienté G ;
QUESTION : Existe-t-il une 3-coloration de G ?

Exercice 6 (GRAPH HOMOMORPHISM) Un homomorphisme d'un graphe $G = (V, E)$ à un graphe $G' = (V', E')$ est une fonction $h : V \to V'$ telle que pour tout $\{v_1, v_2\} \in E$, on a $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$.
ENTRÉE : deux graphes non orientés, G_1 et G_2 ;
QUESTION : Existe-t-il un homomorphisme de G_1 à G_2 ?

Exercice 7 (SUBGRAPH ISOMORPHISM) Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes si $|V| = |V'|$ et $|E| = |E'|$ et il existe une fonction bijective $h : V \to V'$ telle que $\{v_1, v_2\} \in E$, si et seulement si $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$.
ENTRÉE : Deux graphes G et H.
QUESTION : Est-ce que G contient un sous-graphe isomorphe à H ?