Complexité : TD bonus

Chargé de TD : Adrien Koutsos

Machines alternantes

Une *machine de Turing alternante* est une machine de Turing dont les états sont étiquetés par les symboles booléens $\wedge, \vee, \top, \bot$. Lorsqu'on arrive dans un état $\top$, la machine accepte ; lorsqu'on arrive dans un état $\bot$, la machine rejette ; lorsqu'on arrive dans un état $\wedge$, la machine explore toutes les branches et accepte si toutes les branches acceptent ; lorsqu'on arrive dans un état $\vee$, la machine explore toutes les branches et accepte si l'une des branches accepte.

Formellement, une machine de Turing alternante à k bandes est un 6-uplet $(Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, \lambda)$ où :

— Q est un ensemble fini d'états,

— $q_0 \in Q$ est l'état initial,

— Σ est l'alphabet d'entrée, on y ajoute un marqueur de fin $\$ \notin \Sigma$,

— Γ est l'alphabet de travail, on y ajoute un caractère blanc $\# \notin \Gamma$,

— $\delta \subseteq Q \times (\Gamma \cup \{\#\})^k \times (\Sigma \cup \{\$\}) \times Q \times \Gamma^k \times \{\mathbf{left}, \mathbf{right}\}^k \times \{\mathbf{left}, \mathbf{right}\}$ est la fonction de transition,

— $\lambda : Q \longrightarrow \{\wedge, \vee, \top, \bot\}$ est la fonction d'étiquetage des états.

Une transition $(q, (a_1, \ldots, a_k), c, q', (b_1, \ldots, b_k), (m_1, \ldots, m_k), m) \in \delta$ indique que la machine peut passer de l'état q à l'état q' en lisant $(a_1, \ldots a_k)$ sur les bandes de travail et c sur l'entrée, et qu'elle écrit alors $(b_1, \ldots, b_k)$ sur les bandes de travail et se déplace dans la direction m_i sur chaque bande i, et dans la direction m sur l'entrée.

Comme pour les machines de Turing non déterministes, une machine de Turing alternante accepte une entrée en temps t si elle l'accepte en n'explorant que des configurations accessibles en au plus t étapes depuis la configuration initiale.

Une machine de Turing alternante accepte une entrée en espace s si elle l'accepte en n'explorant que des configurations dans lesquelles au plus s caractères sont écrits sur les bandes.

On note $ATIME(f(n))$ (respectivement $ASPACE(f(n))$) l'ensemble des langages acceptés par une machine de Turing alternante en temps (respectivement en espace) $f(n)$, n étant la taille de l'entrée.

Question 1 *Montrer que*

1. *pour* $f(n) \geq n$, *on a* $ATIME(f(n)) \subseteq DSPACE(f(n))$.
2. *pour* $f(n) \geq \log(n)$, *on a* $ASPACE(f(n)) \subseteq \bigcup_{c>0} DTIME(c^{f(n)})$.
3. *pour* $f(n) \geq n$, *on a* $NSPACE(f(n)) \subseteq \bigcup_{c>0} ATIME(cf(n)^2)$.
4. *pour* $f(n) \geq n$ *et* $c > 0$, *on a* $DTIME(f(n)) \subseteq ASPACE(c\log(f(n)))$.

Automates alternants

Une machine alternante qui n'a pas de bande de travail ($k = 0$) et qui ne se déplace que vers la droite sur la bande de lecture, est appelée un *automate alternant.*

Question 2 *Montrer que pour tout automate alternant à n états, il existe un automate non déterministe à 2^n états qui accepte le même langage.*

Accélération linéaire

Question 3 *Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\mathit{TIME}(f(n)) \subseteq \mathit{TIME}(\epsilon f(n) + 2.n + C)\,.$$

Ou C est une constante. Évaluer le nombre d'états et de transitions de la nouvelle machine de Turing.