TD4

Chargé de TD : Adrien Koutsos
`adrien.koutsos@lsv.fr`
`http://www.lsv.fr/~koutsos`

Exercice 1

Prouvez l'indécidabilité des problèmes suivant. On se forcera à utiliser le théorème de Rice lorsque c'est possible.

1. **Donnée :** le code $< M >$ d'une machine de Turing
   Question : Est-ce que $\mathcal{L}(M) = \emptyset$?
2. **Donnée :** le code $< M >$ d'une machine de Turing
   Question : Est-ce que le tête de lecture passe sur \$ lors du calcule de M sur ϵ.
3. **Donnée :** le code $< M >$ d'une machine de Turing
   Question : Est-ce que le complémentaire de $\mathcal{L}(M)$ est récursivement énumérable ?
4. **Donnée :** le code $< M >$ d'une machine de Turing
   Question : Existe-il deux mots ω_1 et ω_2 de même longueur tel que $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}(M)$?
5. **Donnée :** le code de deux machines de Turing M et M' qui calculent en temps polynomial
   Question : $\mathcal{L}(M) \cap \mathcal{L}(M') = \emptyset$
6. **Donnée :** le code $< M >$ d'une machine de Turing
   Question : Est-ce que $\mathcal{L}(M) = \{\omega \in \Sigma^* \mid |\omega| \text{ est pair}\}$?

Exercice 2 (automates linéairement bornés)

Un *automate linéairement borné* est une machine de Turing qui lorsqu'elle lit un blanc, écrit un blanc et se déplace vers la gauche.

1. Montrer que le problème de l'arrêt des automates linéairement bornés est décidable.
2. Montrer que le problème de l'arrêt universel des automates linéairement bornés est indécidable :
   Donnée : $< M >$ où M est un automate linéairement borné
   Question : est ce que M s'arrête sur toute donnée ?

Exercice 3 (Fonctions calculables et langages récursifs)
Donner une fonction calculable dont l'image n'est pas récursive.

Exercice 4 Rice-Shapiro
Soit $\mathcal{P}$ une propriété des langages récursivement énumérables, montrer que $\mathcal{P}$ est elle même récursivement énumérable si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\forall L \in \mathcal{P}$, pour tout L' récursivement énumérable, si $L \subseteq L'$ alors $L' \in \mathcal{P}$
2. $\forall L \in \mathcal{P}$, il existe $L' \in \mathcal{P}$ fini tel que $L' \subseteq L$
3. L'ensemble suivant est récursivement énumérable :

$$\{\overline{(\mathcal{L}(M))} \mid \mathcal{L}(M) \text{ fini et } < M > \in \mathcal{P}\}$$

(ou $\overline{\{w_0, \ldots, w_n\}} = w_0 \# w_1 \ldots \# w_n$ ou $w_0 <_{\mathsf{lex}} \cdots <_{\mathsf{lex}} w_n$).

Exercice 5 (Systèmes de réécriture)
Un système de réécriture de mots sur l'alphabet Σ est donné par un ensemble fini de paires $(u, u') \in \Sigma^* \times \Sigma^*$. La relation de réécriture associée est $\to_R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ définie par

$$w \to_R w' \text{ ssi } \exists (u, u') \in R.\ \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*.\ w = w_1 u w_2 \land v = w_1 u' w_2$$

La relation de réduction $\to_R^*$ est la clôture réflexive transitive de la relation de réécriture. Par exemple, avec

$$R = \{(c, abaca), (c, bcbabab), (aca, d), (bcb, d), (ada, d), (bdb, d)\}$$

on a $c \to_R^* d$:

$$\overline{c} \to_R \underline{aba\overline{c}a} \to_R aba\underline{b\overline{c}babab}a \to_R abab\underline{ab\overline{aca}}bababa \to_R ababa\overline{b\underline{d}b}ababa$$

$$\to_R abab\overline{a\underline{d}a}baba \to_R aba\overline{b\underline{d}b}aba \to_R ab\overline{a\underline{d}a}ba \to_R a\overline{b\underline{d}b}a \to_R \overline{a\underline{d}a} \to_R \underline{d}$$

Montrer que le problème d'*accessibilité* est indécidable :
Donnée: un système de réécriture R et deux mots $u, v \in \Sigma^*$;
Question: est-ce que $u \to_R^* v$?